

# Skizze einer offenen Theorie von Elektrodynamik, Gravitation, Quantenmechanik

Peter Ostermann

Die Gleichungen einer ersten einheitlichen Skalar-Vektor-Tensor-Theorie von Quantenmechanik, Elektrodynamik und Gravitation werden unter Zugrundelegung eines konsistenten Integralprinzips für lokalisierbare geladene Teilchen abgeleitet.

Aus der simultanen Variation aller darin enthaltenen Variablen fließen dabei: a) die MAXWELL'schen Gleichungen in quantisierter Form; b) die LORENTZ-Kraft als Wechselwirkung *verschiedener* Teilchen; c) der Zusammenhang zwischen Viererstromdichte und Viererpotential; d) die KLEIN-GORDON-Gleichung einschließlich unkonventioneller Normierung; e) die EINSTEIN'schen Gravitationsgleichungen; f) der dazugehörige mikroskopische Energie-Impuls-Tensor der Materie mit seinen Skalar-, Vektor- und Tensoranteilen; g) die Energie-Frequenz-Beziehung für Photonen bei Übergängen im elektrischen Feld; h) ein modifiziertes Modell elektromagnetischer Wellen.

Als nachvollziehbare Näherungen mit eingeschränktem Geltungsbereich enthält das hier behandelte Variationsprinzip außerdem: i) die klassische Mechanik einschließlich der Idealisierungen von Massenpunkt und potentieller Energie; j) die konventionelle LORENTZ'sche Elektrodynamik mit den MAXWELL'schen Gleichungen in der bisher üblichen Form; k) die klassische HAMILTON-JACOBI-Gleichung für geladene Teilchen; l) den herkömmlichen Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes; m) den phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor der allgemeinen Relativitätstheorie mit dem daraus folgenden ‚geodätischen‘ Bewegungsgesetz; n) die fundamentale SCHRÖDINGER-Gleichung; o) die Mehrteilchen-Wellengleichung im Konfigurationsraum.

Eine in Anhang A knapp umrissene erste Erweiterung betrifft die Erfassung elementarer Polarisierungseffekte durch die DIRAC-Gleichung für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen.

In einem Abschnitt zur Kosmologie wird das einzige *stationäre* Linienelement der allgemeinen Relativitätstheorie abgeleitet, das eine *konstante* universale Lichtgeschwindigkeit impliziert. Dieses zugleich einfachste überhaupt in Betracht kommende Linienelement beinhaltet gleichbleibende Werte der Rotverschiebung und aller daraus abgeleiteten Größen. Es kommt den fundamentalen Beobachtungstatsachen der Supernova-Ia-Helligkeiten sehr nahe. In Anhang B wird detailliert nachgewiesen, daß die Berücksichtigung kleiner Inhomogenitäten gegebenenfalls zu einer vollständigen Übereinstimmung mit den Meßdaten führen kann. Im Hinblick auf ein stationäres Universum – das hinter unserem evolutionären Kosmos erkennbar wird – lassen sich also die vergleichsweise geringen bisherigen Abweichungen möglicherweise im Sinne lokaler Korrekturen beheben.

Die hier entwickelte *deduktive* Quantenmechanik steht einschließlich der Unschärferelationen im Einklang mit bewährten Prinzipien der relativistischen Physik – allerdings nicht mehr als Punktmechanik, sondern als Theorie *ausgedehnter Teilchen veränderlicher Gestalt*. Der dabei eingeschlagene Weg hätte unter rein logischen Aspekten bereits zehn Jahre vor dem historischen Durchbruch zur Quantenmechanik besritten werden können, und zwar unmittelbar nach EINSTEINS Erstellung der allgemeinen Relativitätstheorie.

Überarbeitung vom 21. Dezember 2008

---

[box@peter-ostermann.de](mailto:box@peter-ostermann.de)

|                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Einleitung .....                                                                                  | 3   |
| 2. Bezeichnungen und Schreibweisen .....                                                             | 8   |
| 3. Physikalische Grundbegriffe einer <i>angemessenen</i> Naturphilosophie .....                      | 14  |
| 3.1 Die Existenz atomarer Systeme und die Einheit der Natur .....                                    | 15  |
| 3.2 Differential und Integral als Inbegriffe von Feld und Teilchen .....                             | 16  |
| 3.3 Das Energie-Impuls-Postulat .....                                                                | 18  |
| 3.4 Die Unterscheidung von Kosmos und Universum .....                                                | 19  |
| 4. Dynamische Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie .....                                      | 23  |
| 4.1 Erlaubt die Relativitätstheorie eine deterministische Naturauffassung? .....                     | 24  |
| 4.2 Scheinbare Verletzung der Erhaltungssätze bei stationären Bewegungsabläufen .....                | 26  |
| 4.3 Ein zentrales Problem der relativistischen Mechanik .....                                        | 28  |
| 5. Der Schlüssel zu einer notwendigen Erweiterung der Elektrodynamik .....                           | 31  |
| 5.1 Die Unvollständigkeit der MAXWELL-LORENTZ'schen Theorie .....                                    | 32  |
| 5.2 Kombination mit dem phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor der Materie .....                   | 34  |
| 5.3 Ein physikalischer Zusammenhang zwischen Viererstromdichte und Viererpotential ..                | 35  |
| 6. Das konsistente Variationsprinzip und die daraus fließenden Gleichungen .....                     | 37  |
| 6.1 Die Zusammenstellung einer einfachsten Wirkungsichte im Detail .....                             | 38  |
| 6.2 Die MAXWELL'schen Gleichungen der ladungsbezogenen Einzelfelder .....                            | 41  |
| 6.3 Die Gleichungen der Quantenmechanik bei Vernachlässigung von Spineffekten .....                  | 43  |
| 6.3.a Die kovariante Wellengleichung der reellen Gestaltfunktion $q_K$ .....                         | 43  |
| 6.3.b Die Kontinuitätsgleichung für Ruhemasse und Ladung .....                                       | 44  |
| 6.3.c Die komplexe Zusammenfassung zur KLEIN-GORDON-Gleichung .....                                  | 45  |
| 6.3.d Die SCHRÖDINGER-Gleichung als einfache Näherung .....                                          | 49  |
| 6.4 Die EINSTEIN'schen Gleichungen im quantenmechanischen Zusammenhang .....                         | 51  |
| 6.5 Die Konsistenz des assoziierten Energie-Impuls-Tensors von Feld und Teilchen .....               | 53  |
| 7. Neue Aspekte der Quantenmechanik .....                                                            | 58  |
| 7.1 Identifikation des Stationaritäts-Parameters $\varepsilon$ mit der Elektronenenergie beim H-Atom | 59  |
| 7.2 Geladene Teilchen im quellenfreien Bereich elektromagnetischer Felder .....                      | 62  |
| 7.3 Die Energie-Frequenz-Beziehung für Photonen bei Übergängen im elektrischen Feld                  | 65  |
| 7.4 Das Konzept der Zuordnung von Operatoren zu mechanischen Größen .....                            | 67  |
| 7.5 Zur Deutung der HEISENBERG'schen Unschärferelation .....                                         | 71  |
| 7.6 Notwendigkeit einer Vertiefung des Konzepts im Hinblick auf das Proton im H-Atom ...             | 73  |
| 7.7 Der Übergang zur Mehrteilchen-Wellengleichung im Konfigurationsraum .....                        | 77  |
| 8. Ansatz zu einer modifizierten Elektrodynamik .....                                                | 79  |
| 8.1 Die LORENTZ-Kraft als Wechselwirkung zwischen <i>verschiedenen</i> Teilchen .....                | 79  |
| 8.2 Das Photon im Hinblick auf ein modifiziertes Modell elektromagnetischer Wellen .....             | 80  |
| 8.3 Der näherungsweise Übergang zu einer relativistischen Punktmechanik .....                        | 82  |
| 9. Zur Gravitation .....                                                                             | 83  |
| 9.1 Eine einfache Interpretation der Allgemeinen Relativitätstheorie .....                           | 84  |
| 9.2 Das relativistische Modell eines stationären Hintergrund-Universums .....                        | 86  |
| 9.2.a Ein Linienelement mit konstantem $c^*$ und gleichbleibenden Werten von $z$ .....               | 90  |
| 9.2.b Die kosmischen Obergrenzen von Eigenlänge und Eigenzeit .....                                  | 95  |
| 9.3 Die Frage einer weitergehenden Quantisierung der Gravitation .....                               | 99  |
| 10. Rückblick und Ausblick .....                                                                     | 100 |
| 10.1 Offene Fragen und einige Möglichkeiten zur Vertiefung des vorgelegten Konzepts ....             | 102 |
| 10.2 Abschließende Bemerkungen .....                                                                 | 104 |
| Anhang A: Eine erste Erweiterung zur Erfassung der DIRAC-Gleichung .....                             | 106 |
| Anhang B: Das stationäre Modell im Vergleich mit den Supernova-Ia-Daten .....                        | 110 |
| Literatur .....                                                                                      | 116 |

## 1. Einleitung

Die Erfolge der Quantenmechanik mitsamt ihren diversen Verzweigungen sind so überwältigend, daß es sich erübrigt, diesen Sachverhalt hier weiter zu unterstreichen. Und dennoch erwächst nach wie vor ein gewisses Unbehagen daraus, daß diese Theorie nach allgemeiner Auffassung einen grundsätzlichen Bruch mit der ‚klassischen‘ Elektrodynamik darstellen soll, obwohl letztere doch in ihrem makroskopischen Geltungsbereich widerspruchsfrei zu sein scheint und aus ihr nicht zuletzt vor hundert Jahren die Relativitätstheorie hervorgegangen ist. Diese wird zusammen mit der Elektrodynamik im Rückblick oft als die Vollendung der klassischen Physik verstanden, wohingegen die Quantenmechanik – seit ihren Anfängen mit PLANCK, EINSTEIN und BOHR – als ein revolutionärer Durchbruch betrachtet wird.

Zwar ist eine solche Auffassung unter historischen Gesichtspunkten sicher richtig. Auch daß die Quantenmechanik trotz aller Erfolge bis heute letztlich unverstanden geblieben ist, scheint diese Einschätzung zu bestätigen. Trotzdem aber verhält es sich bei näherem Hinsehen *nicht* so, daß die Relativitätstheorie weniger Überraschungen birgt, ganz im Gegenteil.

Denn es führt ein direkter Weg von der so genannten ‚klassischen‘ Elektrodynamik in Form der von LORENTZ, LARMOR und POINCARÉ entwickelten Elektronentheorie über die EINSTEIN’sche Relativitätstheorie bis zur Quantenmechanik. Dieser Weg orientiert sich ausschließlich an handfesten physikalischen Argumenten und theoretischen Notwendigkeiten, sodaß er – unter rein logischen Aspekten – bereits vor ihrer tatsächlichen Entdeckung hätte beschritten werden können. Er impliziert eine insbesondere von den Vertretern der Kopenhagener Schule für unmöglich gehaltene Deduktion der KLEIN-GORDON-Gleichung – einschließlich der SCHRÖDINGER-Gleichung als einfacher Näherung – aus einem klar begründeten reellen Variationsprinzip. Die daraus resultierende Physik ist mit der klassischen grundsätzlich vereinbar, allerdings nicht mehr als Punktmechanik, sondern als Theorie *ausgedehnter* Teilchen *veränderlicher* Gestalt..

Die empirischen Tatsachen der Quantenmechanik gehören seit den 30er Jahren des letzten Jahrhunderts zum selbstverständlichen Basiswissen jeden Physikers. Ausgerechnet daran mag es liegen, daß wesentliche Fragen der *Relativitätstheorie* bis heute nicht zur Kenntnis genommen, oder aber in Vergessenheit geraten sind. Ausgangspunkt für das folgende waren insbesondere Überlegungen zur relativistischen Behandlung einfacher Bewegungsabläufe in abgeschlossenen Systemen [1], die ich rückblickend als *dynamische* Paradoxa der Relativitätstheorie bezeichnen möchte. Diese betreffen Teilchen in begrenztem Volumen wie z.B. Rotator oder Oszillator. Es ist natürlich kein Zufall, daß es sich dabei gerade um Prototypen der Quantenmechanik handelt. Wer wissen will, was in Systemen wie einem Kasten mit eingeschlossenen Teilchen letztlich vonstatten geht, der greift schwerlich zu einem Lehrbuch der Relativitätstheorie. Niemand wird heute erwarten, zu dieser Frage dort etwas zu finden, was über die klassische Behandlung gemäß der NEWTON’schen Mechanik *wesentlich* hinausgeht. Doch gerade anhand der genannten Paradoxa läßt sich zeigen, daß die EINSTEIN’sche Relativitätstheorie keinesfalls zu verstehen ist als lediglich quantitativ modifizierte NEWTON’sche Mechanik oder gar als Abschluß der klassischen Physik. Ein entscheidendes Problem der bisherigen relativistischen Mechanik liegt nämlich darin, daß bei Bewegungsabläufen von Teilchen in abgeschlossenen Systemen immer *Umkehrpunkte* existieren, die infolge der (lokalen) Relativität der Gleichzeitigkeit je nach Bewegungszustand des Beobachters zu ganz unterschiedlichen Zeitpunkten erreicht werden. Bemerkenswerterweise liegen auch die Anwendbarkeitsgrenzen der quasiklassischen quantentheoretischen Behandlung gerade in Nähe dieser Umkehrpunkte!

Es ist von entscheidender Bedeutung, daß die dynamischen Paradoxa als bislang effektiv ignorierte relativistische Phänomene selbst bei kleinen Objektgeschwindigkeiten  $u \ll c$  ständig auftreten. Denn dazu genügen große relative *Systemgeschwindigkeiten*  $v \rightarrow c$ , die sich grundsätzlich immer erzielen lassen – oder besser: in Bezug auf passende Systeme bereits immer gegeben sind. Die Bezeichnung ‚dynamische Paradoxa‘ weist hin auf den charakteristischen Unterschied zu den mittlerweile in allen Facetten ausdiskutierten kinematischen Paradoxa, wobei allerdings eine scharfe Trennung von Kinematik und Dynamik im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie unmöglich ist, wie ich am Beispiel der rotierenden Scheibe gezeigt habe [2]. Die zuvor weitgehend übersehene Unmöglichkeit einer solchen Trennung findet andererseits ihren vielleicht deutlichsten Ausdruck in den HEISENBERG’schen Unschärferelationen der Quantenmechanik, welche bezeichnenderweise immer die Unschärfe einer *kinematischen* mit der einer *dynamischen* Größe verknüpfen.

In der eben zitierten Arbeit wurde diese Auffassung durch Analyse des EHRENFEST'schen Paradoxons [2] begründet und die Arbeitshypothese aufgestellt: *Eine konsequent durchgeführte relativistische Mechanik ... wird sich am Ende als Quantenmechanik erweisen.* Der damit formulierte Anspruch ist hier grundsätzlich eingelöst, indem eine klar verständliche Ableitung der fundamentalen Gleichungen gegeben wird. Dabei stellt sich die Quantenmechanik als notwendige Vervollständigung einer Elektrodynamik heraus, die nach Klärung zunächst verbleibender Probleme vielleicht einmal zu Recht *klassisch*<sup>1)</sup> genannt werden könnte.

Den Zugang zu einer ersten einheitlichen relativistischen Theorie, die Elektrodynamik, Quantenmechanik und Gravitation *konsistent* zusammenfaßt, habe ich in einem Variationsprinzip

$$\delta \int \Phi d\Omega = 0 \quad (1,1)$$

gefunden ( $d\Omega \equiv dx dy dz dt$ ). Die Wirkungsdichte  $\Phi$  ist durchgängig aus *reellen* Summanden aufgebaut, die sich im einfachsten Fall – wie nach Aufschlüsselung in Abschnitt 6.1 erkennbar wird – auf zwei Skalare, einen Vektor und einen Tensor zurückführen lassen:

$$\Phi \equiv \frac{1}{4} \mathbf{H}^{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} \mathbf{J}^l \tilde{A}_l + \frac{1}{2} \mu_0 c^2 + C \mathbf{Q}^l Q_l + \frac{1}{2\kappa} \mathbf{R}. \quad (1,2)$$

Sie ist hier vorläufig in Anlehnung an die übliche Schreibweise dargestellt. Der das Gravitationsfeld repräsentierende Anteil ist in Form des wohlbekannten HILBERT'schen Ausdrucks  $\mathbf{R}/2\kappa$  enthalten, der sich ausschließlich aus dem Fundamentaltensor  $g_{ik}$  der allgemeinen Relativitätstheorie und einigen daraus direkt oder indirekt gebildeten bzw. abgeleiteten Größen zusammensetzt. Der verbleibende *materielle* Anteil  $\tilde{\Phi} \equiv \Phi - \mathbf{R}/2\kappa$  der Wirkungsdichte aber stellt sich im Detail nicht so einfach dar, wie es auf den ersten Blick scheinen mag. Dies wird später in Abschnitt 6.1 deutlich werden, wo nach einer – zuvor als notwendig erwiesenen – Begründung der obige Ansatz zu seiner ersten vollen Entfaltung kommt.

Für lateinische Indizes gilt  $i, k, l \dots = 0, 1, 2, 3$  (im Unterschied zu griechischen  $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3$  bei rein räumlichen Komponenten). Wie bei  $\mathbf{R} \equiv \sqrt{g} R$  sollen auch alle übrigen nicht-kursiv geschriebenen fettgedruckten Größen die Wurzel  $\sqrt{g}$  der negativen Determinante des Fundamentaltensors als jeweils *vorangestellten Faktor* enthalten. Obwohl abgesehen von einer neu auftretenden skalaren Funktion  $Q$  und der Konstanten  $C$  die grundsätzliche Bedeutung der übrigen, allgemein gebräuchlichen Symbole in (1,2) eigentlich keiner weiteren Erklärung bedarf, sei hier auf die systematische Zusammenstellung „Bezeichnungen und Schreibweisen“ in Abschn. 2 hingewiesen.

Im Interesse eines von Anfang an möglichst unmißverständlichen Zugangs sind bereits an dieser Stelle einige wesentliche Punkte anzumerken. Die auf Anhub wohlvertraut aussehende Wirkungsdichte  $\frac{1}{4} \mathbf{H}^{kl} F_{kl}$  des elektromagnetischen Feldes ist im Detail zu bilden aus dem Feld  $\mathbf{h}_K^{kl}$  eines *einzelnen* geladenen Teilchens  $K$  mit dem Feld  $f_{kl}^{\bar{K}}$  aller *anderen* Teilchen  $\bar{K}$ , wobei der gesamte Ausdruck  $\Phi$  erst durch Summation über die der Reihe nach herausgegriffenen Teilchen  $K$  entsteht. Ebenso setzt sich in der skalaren Dichte  $\frac{1}{2} \mathbf{J}^l \tilde{A}_l$  die Viererstromdichte  $\mathbf{J}^l$  aus den Beiträgen der eben erwähnten einzelnen Teilchen zusammen, während  $\tilde{A}_l$  jeweils die Superposition der erweiterten Viererpotentiale aller anderen Teilchen repräsentiert. Bis auf die für das folgende wesentliche Unterscheidung einzelner Felder und Potentiale entspricht die erste Teilsumme  $\frac{1}{4} \mathbf{H}^{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} \mathbf{J}^l \tilde{A}_l$  mit der Belegung  $\mathbf{H}^{kl} := F^{kl}$  der ursprünglich von LARMOR [4] und SCHWARZSCHILD [5] angegebenen Wirkungsdichte, aus welcher – allerdings nur bei *vorgegebener* Stromdichte, deshalb fehlt dort der Faktor  $\frac{1}{2}$  – durch Variation der Potentiale das eine Paar der MAXWELL'schen Gleichungen folgt, während das andere per Reduktion der elektromagnetischen Feldstärken auf die Potentiale identisch erfüllt ist. Eine formal ähnlich gebildete Teilsumme wurde dann benutzt von MIE [6], der dabei als erster den elektromagnetischen Potentialen eine physikali-

<sup>1)</sup> Unter einer *klassischen* Theorie verstehe ich eine solche, die nach Maßgabe der zugrundegelegten Voraussetzungen eine konsistente Behandlung ihres Gegenstands erlaubt. Dies bedeutet, daß die gegenüber der Wirklichkeit zwangsläufig verbleibenden Unvollkommenheiten allein außerhalb der von ihren eigenen Voraussetzungen implizierten Gültigkeitsgrenzen der Theorie auftreten. – Wie EINSTEIN [3] betonte, hat es eine klassische Physik seit NEWTONS Mechanik nicht mehr gegeben. Ich werde im Folgenden deshalb eher von der *konventionellen* als von der ‚klassischen‘ Elektrodynamik sprechen.

sche Bedeutung zuerkannte und einen konkreten Zusammenhang mit der Stromdichte forderte. In Abschnitt 5 wird nun ein solcher Zusammenhang aus wohlvertrauten Beziehungen der konventionellen Elektrodynamik abgeleitet. Die Grundgleichungen der nicht-linearen MIE'schen Theorie wurden von BORN [7] vierdimensional formuliert und von HILBERT [8] kovariant in EINSTEIN'S zuvor entwickelte allgemeine Relativitätstheorie [9] übertragen<sup>2)</sup>, wobei der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor nun einfach aus der Variation der Gravitationspotentiale  $g_{ik}$  resultiert. Daß dieser aber nicht genügt, um den von EINSTEIN in seinen Gleichungen verwendeten, auf MINKOWSKI [12] zurückgehenden phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor der Materie zu repräsentieren, ergibt sich aus WEYL'S [13] Ergänzung des obigen dritten Anteils  $\frac{1}{2}\mu_0 c^2$ , der erst die als richtig erkannten Bewegungsgleichungen für Teilchen im Gravitationsfeld mit sich bringt. Doch setzt dieser Fortschritt den Kunstgriff einer *vor* der Variation ausgeführten räumlichen Integration voraus, welche den hier aufgezeigten klassischen Zugang zur Quantenmechanik gewissermaßen verbirgt.

Denn auch der so entstandene WEYL'sche Ausdruck kann – abgesehen von der fehlenden Zuordnung einzelner Felder zu ihren Teilchen – immer noch nicht den im folgenden begründeten Anspruch erfüllen. Dieser betrifft eine *vollständige* Variation, die nach meiner Überzeugung sämtliche in der vierdimensionalen Wirkungsichte explizit auftretenden Funktionen und Ableitungen der Reihe nach einbeziehen muß, ohne daß irgendeine davon unverändert bleiben darf. Wie später gezeigt wird, stellt gerade dieser Anspruch eine Bedingung dafür dar, daß sich die oben erwähnten dynamischen Paradoxa konsistent auflösen lassen. Eine demzufolge grundsätzlich geforderte vollständige Variation aber wird erstmals durch die hier angebrachte Erweiterung  $CQ^I Q_I$  widerspruchsfrei möglich. Und zwar deshalb, weil es bei Verwendung dieser Erweiterung gelingt, auch die Viererstromdichte  $J^I$  und die Ruhmassendichte  $\mu_0$  als Funktion der in Abschnitt 6.1 detailliert aufgezeigten – unabhängig zu variierenden – Basisgrößen und ihrer Ableitungen zu schreiben.

Aus dem Variationsprinzip (1,1-2) für Teilchen im elektromagnetischen und Gravitationsfeld fließen dabei insbesondere: a) die MAXWELL'schen Gleichungen in quantisierter Form; b) die LORENTZ-Kraft als reine Wechselwirkung *verschiedener* Teilchen; c) die physikalische Erweiterung der elektromagnetischen Potentiale und der konkrete Zusammenhang zwischen Viererstromdichte und Viererpotential; d) die KLEIN-GORDON-Gleichung einschließlich unkonventioneller Normierung; e) die EINSTEIN'schen Gravitationsgleichungen; f) der dazugehörige mikroskopische Energie-Impuls-Tensor der Materie; g) die Energie-Frequenz-Beziehung für Photonen bei Übergängen im elektrischen Feld. Zusätzlich enthält das hier angegebene Variationsprinzip als ableitbare Näherungen mit eingeschränktem Geltungsbereich: h) die klassische Mechanik einschließlich der Idealisierungen von *Massenpunkt* und *potentieller Energie*; i) die LORENTZ'sche Elektrodynamik mitsamt den MAXWELL'schen Gleichungen in der heute üblichen Form; j) die klassische HAMILTON-JACOBI-Gleichung für geladene Teilchen; k) den herkömmlichen Energie-Impuls-Tensor für elektromagnetische Wellen; l) die allgemeine Relativitätstheorie mit *phänomenologischem* Energie-Impuls-Tensor und Bewegungsgesetz; m) die fundamentale SCHRÖDINGER-Gleichung mitsamt den daraus resultierenden EHRENFEST'schen Sätzen; n) die Mehrteilchen-Wellengleichung im Konfigurationsraum.

Das hier vorgeschlagene offene System des wechselseitigen Zusammenspiels aller jeweils erfaßten Kräfte impliziert die Möglichkeit, die Existenz von Elementarteilchen aus tieferliegenden Symmetrien zu erklären. Zentrales Kriterium ist dabei, daß das entsprechende Wirkungsprinzip im Sinne einer vollständigen Variation *konsistent* ist und bei Vernachlässigung der inneren Struktur der Teilchen in das oben gegebene übergeht. Dieses Kriterium wird bereits am Beispiel der DIRAC-Gleichung zum Tragen kommen. Bei Beschränkung auf solche Aussagen aber, die sich unabhängig von der inneren Struktur der Teilchen machen lassen, wird dies an der phänomenologischen Makrophysik als Näherungstheorie der selbst wohl immer nur unvollständig beschreibbaren mikroskopischen Vielfalt kaum etwas ändern. Bezeichnenderweise konnten die Grundlagen der heutigen Quantenmechanik ursprünglich von PLANCK und EINSTEIN, dann vor allem von BOHR, SOMMERFELD, HEISENBERG einerseits und schließlich von DEBROGLIE und SCHRÖDINGER andererseits ohne jeden Bezug auf einen Teilchen-spin gelegt werden.

---

<sup>2)</sup> Zur vorausgegangenen Entwicklung s. [10]. Die jüngsten Forschungsergebnisse zur Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie finden sich in [11].

Aus dem hier zugrundeliegenden Variationsprinzip (1,1-2) ergibt sich meines Wissens zum ersten Mal ein lokalisierbarer Energie-Impuls-Spannungs-Tensor der quantisierten Materie ohne physikalische Singularitäten, Sprungstellen oder die Verwendung von  $\delta$ -Funktionen<sup>3)</sup>. Gerade dies war das erklärte Ziel, und es scheint in seiner einfachsten Form nun erreicht. Darüberhinaus aber läßt es sich als Konzept einer *offenen Theorie* verstehen, die vor allem verlangt, daß jedes konsistente System durch einen ebensolchen Energie-Impuls-Tensor beschrieben wird. Die erste Erweiterung betrifft zunächst einmal die Erfassung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen durch die DIRAC-Gleichung (s. Anhang A).

Was aber das Revolutionäre an der Quantenmechanik betrifft, so könnte sich manches davon auflösen, sobald zwei einfache Tatsachen akzeptiert sind:

1. Jede mathematische Theorie realer Gegebenheiten beginnt mit einem grundsätzlichen Verzicht auf *vollständige* Erfassung der Wirklichkeit. Und zwar durch die unumgängliche Verwendung irreduzibler (unbeweisbarer) Voraussetzungen, Prinzipien, Axiome einerseits sowie durch unvermeidbare begriffliche Unschärfen andererseits. Die quantenmechanische Beschreibung der Wirklichkeit muß *naturgemäß* unvollständig sein.

2. Reale Teilchen wie Elektronen und Protonen – oder auch ihre Bestandteile – sind weder ausdehnungslose Punkte, noch eindimensionale ‚Strings‘, noch zweidimensionale Membranen, sondern *natürlich dreidimensionale* Strukturen. Dieser Sachverhalt, der als einfache Voraussetzung hier nicht weiter begründet werden soll, bestreitet selbstverständlich nicht den Nutzen, den mathematische Abstraktionen haben können. Gerade NEWTONs Massenpunkt ist ein überwältigendes Beispiel dafür. Ebenso wenig wie Massenpunkte als Teilchen ohne Ausdehnung gibt es aber ausgedehnte Strukturen ohne mögliche Deformation.

Unter diesen Aspekten stellen die HEISENBERG’schen Unschärferelationen eigentlich keine Überraschung dar. Viel unverständlicher wäre es doch, würde sich die Wirklichkeit tatsächlich als Zusammenspiel ausdehnungsloser Massenpunkte und immaterieller Felder abbilden lassen.

Ein freies H-Atom im Grundzustand, dessen Schwerpunkt sich in Ruhe befindet, läßt sich hinreichend scharf lokalisieren. Dieses Atom kann einerseits unmöglich durch eine unendlich ausgedehnte stehende Welle mit überall verschwindender Dichte vollständig beschrieben werden. Andererseits wird es auch durch ein – allzu rasch zerfließendes – Wellenpaket nicht richtig beschrieben. Wie aber Abschnitt 7.6 zeigen wird, läßt sich seine Struktur bisher am ehesten durch eine stationäre Lösung der SCHRÖDINGER- bzw. DIRAC-Gleichung für Proton und Elektron *im wechselseitigen Feld* beschreiben, wobei diese Beschreibung allerdings noch zu grob ausfällt.

Ein Elementarteilchen wie das Proton ist grundsätzlich zu verstehen als ausgedehntes, gegebenenfalls zusammengesetztes Gebilde mit Teilchenparametern in Form charakteristischer Integrale, die trotz innerer Bewegung und innerer Kräfte während der Lebensdauer des Teilchens konstant bleiben. Solche Eigenschaften können vom allzu naiven Bild eines Massenpunkts nicht erfaßt werden. Und im Hinblick auf eine elektrodynamische Theorie der reinen Wechselwirkung mit *anderen* Teilchen brauchen sie das auch gar nicht, solange keine Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse materieller, d.h. ruhmassebehafteter, Teilchen auftreten.

Wenn ich MIE, EINSTEIN, DEBROGLIE, SCHRÖDINGER – um einige der Unentwegten zu nennen – richtig verstanden habe, dann scheint nun doch die Grundlage dessen gefunden, wonach sie seinerzeit intensiv gesucht haben. Im Unterschied zu den vielen vergeblichen Ansätzen aber, die nicht zum gewünschten Erfolg geführt haben, beruht die vorliegende Arbeit nicht auf Spekulation, sondern auf der systematischen Feststellung und Behebung teilweise wohlbekannter Unzulänglichkeiten der so genannten ‚klassischen‘ Physik. Folgende Einsichten haben zumindest vorläufig zum Ziel geführt:

Die Aussage der Quantenmechanik, ein Teilchen habe keinen scharfen Impuls, läßt sich am einfachsten in dem Sinne verstehen, daß eine unscharfe *Impulsdichte* bei deformierbaren Objekten wie z.B. ‚wechselwirkenden‘ Gummibällen ganz selbstverständlich ist. Der Impuls eines lokalisierbaren ‚Teilchens‘ kann meines Erachtens trotz der innerhalb des Teilchens enthaltenen quantenmechanischen ‚Unschärfe‘  $\Delta p^2$  insgesamt beliebig scharf, z.B. *exakt* gleich Null sein. Denn ein scharfer Impuls  $p = 0$  bedeutet eben nicht notwendigerweise eine *Impulsdichte*  $\pi = 0$ . Grenzt man in einem Gas ein Teilvolumen ab, so findet man bei geeigneter Wahl des Bezugssystems, daß der darin enthaltene Impuls im Rahmen der Meßgenauigkeit gleich Null ist; das berechtigt na-

---

<sup>3)</sup> Wie sich selbst das Phänomen des *Quantensprungs* in dieses System stetiger Abläufe einordnen läßt, wird in einem späteren Abschnitt zu besprechen sein.

türlich keineswegs dazu, auch die Impulsdichte in derselben Näherung gleich Null zu setzen. Daß es darüberhinaus Drehimpulse gibt, die in gewissen Situationen nur eine einzige (annähernd) zeitunabhängige Komponente haben, ist hinlänglich bekannt von jedem gleichmäßig präzessierenden Kreisel.

Die Ununterscheidbarkeit von Elementarteilchen erinnert stark an eine Frage wie ‚Wo war der Regentropfen, bevor er aus der Wolke fiel?‘ Ähnlich charakteristische Fragen in Analogie zur Quantenmechanik wären ‚Wo wird dieser Regentropfen morgen sein? Auf welcher ‚Bahn‘ wird er irgendwann zurück in die Wolken gelangen?‘ – Im Rahmen dieses Bildes entspräche dann etwa die ‚Messung‘ von Regentropfen in einer Wolke dem Vorgang der Kondensation am Meßgerät, wobei die zu messenden Tropfen bei diesem Prozeß erst entstehen. Und doch läßt sich ein Regentropfen auf seinem Weg zwischen Wolke und Erde streckenweise sehr gut auch als ‚Massenpunkt‘ beschreiben.

Wenn es also im folgenden um ‚Teilchen‘ geht, dann sollte nicht unterstellt werden, daß es sich dabei um ausdehnungslose, vibrations- und rotationsfreie Gebilde handelt. Im Hinblick auf die gegenwärtige Quantenmechanik bedeutet dies: Natürlich muß eine Theorie ‚revolutionär‘ erscheinen, wenn sie *ausgedehnte Wirbelstrukturen* wie das Elektron und andere Elementarteilchen durchgängig als Massenpunkte beschreiben will.

Die gerade in der Quantenmechanik längst angelegten neuen Konzepte von Feld und Teilchen sollten sich als *natürliche* Grundbegriffe etablieren, wobei kontinuierliche Felder aufgrund diskreter charakteristischer Integrale selbstverständlich Teilcheneigenschaften zeigen können, und umgekehrt diskrete Teilchen aufgrund natürlicher Ausdehnung und kontinuierlich verteilter Dichten durchaus auch Feldeigenschaften. Benötigt wird also eine Physik ausgedehnter Teilchen, allerdings ohne unnötige Hypothesen. Voraussetzung ist lediglich, daß für die veränderlichen Strukturen immer die unveränderlichen Teilchenparameter wie Ruhemasse, Ladung und Eigendrehimpuls als charakteristische Integrale existieren – und zwar im dreidimensionalen Raum.

Die Elektrodynamik war ursprünglich eine Kontinuums- und Dualismustheorie. LORENTZ hat daraus eine erste ‚Quantentheorie‘ entwickelt, indem er den Feld-Teilchen-Dualismus in die Physik einführte. Trotz der großen Erfolge, die er mit seiner Elektronentheorie [14] erzielte, konnte es sich dabei – wegen der Ladungsquantelung, die mit der ursprünglichen MAXWELL’schen Elektrodynamik *eines einzigen* Feldes bis heute unvereinbar bleibt – nicht um das Ende der Entwicklung handeln. Denn bekanntlich ist in diesem Rahmen weder ein punktförmiges Elektron (unendliche Selbstenergie) noch ein ausgedehntes Elektron (gegenseitige Abstoßung der Ladungsanteile) akzeptabel. Beim BOHR’schen Atommodell [15], das am Konzept des geladenen Massenpunkts festgehalten hat, wurden die Grenzen des damaligen Elektronenbildes aufgezeigt und die Grundbegriffe einer ‚revolutionären‘ Quantentheorie geprägt. Doch scheint es mir ein schlechter Brauch, aus der Nicht-Anwendbarkeit des ‚klassischen‘ Elektronenmodells – das ja schon zur konventionellen Elektrodynamik in Widerspruch stand – auf ein endgültiges Versagen der MAXWELL’schen Gleichungen zu schließen.

Im folgenden wird sich die Möglichkeit eröffnen, die oben angesprochenen Probleme zu vermeiden und eine Elektrodynamik als Theorie der reinen *Wechselwirkung* verschiedener Teilchen zu formulieren, ohne auf deren innere Zusammensetzung im Detail einzugehen. Hinsichtlich der Existenz unteilbarer Elementarladungen hat bereits PAULI [16] betont, daß die in dem ursprünglichen Ausdruck der LORENTZ-Kraftdichte enthaltene Rückwirkung auf deren Bestandteile mit der Definition der elektrischen Feldstärke – als Quotient Kraft durch (ruhende) Ladung  $\vec{E} = \vec{F}/e$  – nicht vereinbar sei. Er hat deshalb vorgeschlagen, diese Rückwirkungsanteile *nachträglich* wegzulassen und damit das später so genannte ‚Renormierungs‘-Verfahren vorweggenommen. Bei Auswertung des oben angegebenen Variationsprinzips aber stellt sich nun die Frage einer Renormierung erst gar nicht, weil entsprechende Terme überhaupt nicht auftreten können<sup>4)</sup>.

Denn das Problem des Elektrons als ‚Fremdling‘<sup>5)</sup> in der Elektrodynamik verlangt *nicht* unbedingt seine Lösung, sondern zunächst einmal ‚nur‘ eine *grundsätzliche* Vermeidung, und zwar von Anfang an. Dem wird im Hinblick auf (1,2) dadurch Rechnung getragen, daß dort die elektromagnetischen Feldstärken (u. a.) nur in den wechselseitigen Kombinationen  $\mathbf{f}_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}}$  auftreten sollen. Das Wunderbare ist nun, daß sich hieraus eine konsistente Theorie gewinnen läßt, *ohne* die seinerzeit aufgeworfene Frage überhaupt beantworten zu müssen, welche

<sup>4)</sup> Dafür aber entsteht ein anderes Problem, nämlich das der freien elektromagnetischen Wellen, das in Abschnitt 8.2 formuliert und im Rahmen der hier skizzierten Theorie ansatzweise gelöst wird.

<sup>5)</sup> eine Bezeichnung EINSTEINS, zitiert nach SOMMERFELD [17]

Kraft ,das‘ Elektron wohl zusammenhält. Umgekehrt könnte es nun eher danach aussehen, als ob ein *einzelnes freies* Elektron als lokalisierbares Teilchen gar nicht existenzfähig wäre – ebensowenig wie beispielsweise ein einzelner freier Luftwirbel ohne die umgebende Atmosphäre.

Die im weiteren Verlauf skizzierte Theorie kann innerhalb ihres Geltungsbereichs angesichts der Ableitung aus einem konsistenten Variationsprinzip eigentlich nur grundsätzlich richtig oder grundsätzlich falsch sein.

Einerseits werden dabei natürliche Zusammenhänge aufgedeckt zwischen verschiedenen Bereichen der Physik, die bisher – wie insbesondere die historisch gewachsenen Theorien von Elektrodynamik und Quantenmechanik – konzeptionell als unvereinbar galten. Andererseits treten dabei neue Fragen auf, die vorher in dieser Form nicht gestellt werden konnten. Die Theorie enthält eine dem Kausalitätsprinzip genügende relativistische Mechanik, aus der sich jedoch eine statistische Quantenmechanik als einzig praktikabler Zugang zum atomaren und subatomaren Geschehen ergibt.

Die Gegenüberstellung der historisch gewachsenen Quantenmechanik mit der hier umrissenen quantisierten Elektrodynamik hat viele Aspekte. Ich glaube, daß es bei der Verfertigung einer Skizze auch sinnvoll ist, solche Fragen zu stellen, die sich nicht auf Anhieb bereits definitiv beantworten lassen.

## 2. Bezeichnungen und Schreibweisen

Abgesehen von den hier explizit aufgeführten Bezeichnungen und Schreibweisen gelten allgemein gebräuchliche Regeln und Vereinbarungen, die keiner eigenen Erläuterung bedürfen, es sei denn, ein Symbol wird bei seinem ersten Auftreten – oder auch nur vorübergehend – ausdrücklich anders definiert.

|                         |          |                                                                                                       |
|-------------------------|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Naturkonstanten:</i> | $c$      | ist die auf natürliche Einheiten bezogene lokale Zweiweg-Lichtgeschwindigkeit (s. dazu [2]) im Vakuum |
|                         | $\gamma$ | Gravitationskonstante ( $\kappa \equiv 8\pi\gamma/c^4$ )                                              |
|                         | $e$      | Betrag der Elementarladung                                                                            |
|                         | $\hbar$  | Wirkungsquantum ( $\hbar \equiv 2\pi\hbar$ )                                                          |

Der Begriff des *Elementarteilchens* bezeichnet im folgenden entweder eine (nicht zusammengesetzte) *elementare Struktur* (z.B. Elektron) oder ein aus nicht selbständig existenzfähigen elementaren Strukturen (z.B. Quarks) zusammengesetztes Gebilde (z.B. Proton), wobei in allen Fällen für den Satz der beobachtbaren Teilchenparameter von Ruhemasse, Ladung, Spin usw. die entsprechenden *charakteristischen Integrale* existieren.

|                                                                                       |       |                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Charakteristische Integrale eines (zeitweilig) abgeschlossenen (Teil-)Systems:</i> | $m_0$ | ( $m_K, m_e, m_p \dots$ ) Ruhemasse eines <i>freien</i> Teilchens (nicht zu verwechseln mit der magnetischen Quantenzahl $m$ )                                                                              |
|                                                                                       | $M_0$ | Ruhemasse eines (zeitweilig) abgeschlossenen (Teil-)Systems, bei dem es sich z.B. auch um ein gebundenes Teilchen handeln kann. In diesem Fall entspricht ein Massendefekt $M_0 - m_0$ der Bindungsenergie. |
|                                                                                       | $e_0$ | ( $e_K, e_e, e_p \dots$ ) ist die Ladung eines Teilchens,<br>$e_s \equiv \pm Ze$ die eines (zeitweilig) abgeschlossenen (Teil-)Systems S                                                                    |
|                                                                                       | $l$   | Bahndrehimpuls-Quantenzahl                                                                                                                                                                                  |
|                                                                                       | $m$   | magnetische Quantenzahl (oder aber Magnitude, s. Abschn. 9.2)                                                                                                                                               |
|                                                                                       | $j$   | Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl                                                                                                                                                                                |
|                                                                                       | $n$   | Spinvariable                                                                                                                                                                                                |

Ein frei fallendes System gilt als (zeitweilig) *abgeschlossen*, wenn seine charakteristischen Integrale zeitlich konstant sind (bis auf unvermeidliche Einflüsse der inneren Gravitationswechselwirkung sowie – bei makroskopischen Objekten – des thermischen Austauschs mit der Umgebung, solange beide vernachlässigbar klein sind). Der Begriff *abgeschlossenes System* meint immer solch ein System als Ganzes. Im Unterschied dazu unterliegt ein *Teilsystem* äußeren Kräften, wobei jedoch zumindest eines seiner charakteristischen Integrale (zeitweilig) konstant ist.

|                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Indizes:</i>                                          | $i, k, l \dots = 0, 1, 2, 3$ (lateinisch) für <i>raumzeitliche</i> Größen<br>$\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3$ (griechisch) für rein <i>räumliche</i> Größen<br>$K$ bezeichnet der Reihe nach alle einzelnen Teilchen einer Gesamtheit<br>$\overline{K} \equiv$ Nicht- $K$ verlangt eine Summenbildung über alle Teilchen <i>außer</i> $K$<br>$\nu$ numeriert Eigenfunktionen $\psi_{K\nu}$ eines herausgegriffenen Teilchens $K$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <i>Koordinaten:</i>                                      | $x^i$ allgemeine Koordinaten eines Kontinuums (Feldkoordinaten)<br>$X^i$ Schwerpunktkoordinaten (Teilchenkoordinaten) eines (zeitweilig) abgeschlossenen (Teil-)Systems                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <i>Ableitungen:</i>                                      | $\partial_k \equiv \partial/\partial x^k$ (bzw. $\partial/\partial X^k$ ), $\partial_{kl} \equiv \partial^2/\partial x^k \partial x^l$ (bzw. $\partial^2/\partial X^k \partial X^l$ ) ...<br>$\partial^k \equiv g^{kl} \partial_l \dots$<br>$-\partial_t^l \equiv \square \equiv -\partial_t \partial^l \equiv \Delta - \partial_{tt}/c^2$ steht für den D'ALEMBERT-Operator.<br><p>Ein Punkt bedeutet Ableitung nach der Zeit.</p> <p>Im Falle überzähliger Indizes einer der im folgenden definierten Größen sind diese immer <i>vorangestellt</i> und stehen als Abkürzung für <i>gewöhnliche</i> Ableitungen wie z. B. in:</p> $A_{ik} \equiv \partial_i A_k \dots$ (oder auch in $g_{ik} \equiv \partial_i g_{ik} \dots$ ).<br><p>Demgegenüber werden die betreffenden Indizes bei <i>kovarianten</i> Ableitungen wie üblich angehängt und sind abgetrennt durch ein Semikolon wie z. B. in:</p> $j^k_{;k} \dots$ (oder auch in $T^k_{i;k} \dots$ ). |
| <i>Volumenelemente:</i>                                  | $dV \equiv dx dy dz$ ist das räumliche Volumenelement eines Gesamtsystems,<br>$dV_0$ das Volumenelement bezüglich eines mitbewegten Teilsystems.<br>$c d\Omega \equiv c dt dx dy dz$ ist die vierdimensionale Entsprechung, wobei hier im Unterschied zur üblichen Bezeichnungsweise der Faktor $c$ aus $d\Omega$ herausgenommen ist.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <i>Vektoren, Tensoren und Bi-Tensoren:</i>               | <p>Die Bezeichnungen ‚Vektoren‘ und ‚Tensoren‘ gelten immer im Hinblick auf allgemeine Koordinatentransformationen. Demgegenüber zeigen Bi-Tensoren nur mit Bezug auf ein (zweites) ausgezeichnetes System Tensorcharakter (entsprechendes gilt auch für Bi-Tensordichten).</p> <p>Dreidimensionale Vektoren werden wie z. B. die gewöhnliche Geschwindigkeit <math>\vec{v}</math> mit einem Pfeil geschrieben.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <i>Schreibweise von Skalar-, Vektor-, Tensordichten:</i> | <p>Nicht kursiv geschriebene fettgedruckte Symbole – mit Ausnahme von dreidimensionalen Vektoren wie z. B. <math>\vec{D}</math>, <math>\vec{H}</math> – stehen für Skalar-, Vektor-, Tensordichten sowie Bi-Tensordichten, d.h. sie enthalten den <i>nachträglich vorangestellten</i> Faktor <math>\sqrt{g}</math> wie z. B. in</p> $s^k = \sqrt{g} s^k (\equiv \sqrt{g} \partial^k s) \dots$ oder auch in $T^{ik} = \sqrt{g} T^{ik} \dots$<br><p>Die Bedeutung von Vektor- und Tensordichten liegt darin, daß sich aus den Komponenten solcher <i>Quantitätsgrößen</i> – die von <i>Intensitätsgrößen</i> zu unterscheiden sind – durch räumliche Integration die charakteristischen (Teilchen-)Parameter des jeweiligen abgeschlossenen (Teil-)Systems ergeben. In frei fallenden lokalen Inertialsystemen gilt <math>\sqrt{g} = 1</math> und alle Tensordichten gehen demzufolge in die entsprechenden Tensoren über.</p>                              |
| <i>Fundamentaltensor und einige zugehörige Größen:</i>   | $g_{ik}$ ist der variable symmetrische Fundamentaltensor der allgemeinen Relativitätstheorie (Gravitationspotentiale s. u.), wohingegen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

- $\eta_{ik}$  den konstanten Fundamentaltensor der speziellen Relativitätstheorie mit den allein nicht-verschwindenden Diagonal-Komponenten  $(+1, -1, -1, -1)$  darstellt (und zugleich für die *Signatur* von  $g_{ik}$  steht).
- $\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}(g_{lik} + g_{kil} - g_{ikl})$  sowie  $\Gamma_{kl}^i = g^{im}\Gamma_{m,kl}$  sind die CHRISTOFFEL-Symbole erster und zweiter Art.
- $g = -|g_{ik}|$  ist die *negative* Determinante des Fundamentaltensors  $g_{ik}$ .
- Skalare:*
- $q$  ist die reelle quantenmechanische *Gestaltfunktion* (auch *Formskalar*),  
 $Q$  sei dessen statistisch geglättete – auch makroskopische – Entsprechung.  
 $s \equiv s(t, x, y, z)$  mikroskopischer Wirkungsskalar,  
 $S \equiv S(t, X, Y, Z)$  ist der makroskopische Wirkungsskalar mit  $-\partial_i S \equiv S_i = P_i \equiv (W/c, -\vec{P})$ .
- $d\sigma \equiv \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}$  – Linienelement der allgemeinen Relativitätstheorie
- ... und Dichten:*  $\mu_K, (\mu_0, \mu_e, \mu_p \dots) \equiv \sqrt{g} \mu_K(\mu_0, \mu_e, \mu_p \dots)$  – Skalardichten der Teilchenmassen  $m_K, m_0, m_e, m_p \dots$  mit  $\mu_K \equiv dm_K/dV_K \equiv m_K Q^2 \dots$  In Ergänzung dazu ist  $\tilde{\mu}_K \equiv \mu_K u^0 \equiv \pi_K^0 \equiv \sqrt{g} dm_K/dV$  und liefert im Falle  $\partial_k \pi_K^k = 0$  bei Integration über das Systemvolumen  $V$  die freie Ruhemasse  $m_K$ .
- $\rho_K, (\rho_0, \rho_e, \rho_p \dots) \equiv \sqrt{g} \rho_K(\rho_0, \rho_e, \rho_p \dots)$  sind Dichten der Ladungen  $e_K = \pm e \dots$   
 In Ergänzung dazu ist  $\tilde{\rho}_K \equiv \rho_K u^0 \equiv \tilde{j}_K^0 \equiv de_K/dV$  und liefert im Falle  $\partial_k \tilde{j}_K^k = 0$  bei Integration über das Systemvolumen die Ladung  $e_K$ .
- $\Phi$  ist die Wirkungsichte des *konsistenten* Variationsprinzips.
- Vierervektoren:*
- $dx^i \equiv dX^i + d\xi^i$  sind Differentiale der allgemeinen Koordinaten  $x^i$ ,  
 $dX^i$  Differentiale der Schwerpunktskoordinaten  $X^i(t)$  eines (zeitweilig) abgeschlossenen (Teil-)Systems,  
 $d\xi^i$  Differentiale der Abweichungen von den Schwerpunktskoordinaten.  
 $\tilde{u}^i \equiv u^i + w^i$ , mikroskopisches Analogon zur Vierergeschwindigkeit eines Kontinuums, aber  $\tilde{u}_i \tilde{u}^i \neq 1$  [s. (6,28) in Abschn. 6.3.a];  
 $u_i$  entspricht dem 4-rotationsfreien Anteil von  $\tilde{u}^i$ , d.h. es gilt  $\partial_i u_k - \partial_k u_i = 0$  (demzufolge läßt sich  $u_i = -\partial_i s/m_0 c$  als 4-Gradient einer skalaren Funktion darstellen).  
 $w^i$  sei der 4-divergenzfreie Anteil von  $\tilde{u}^i$ , d.h. es soll gelten  $\partial_k w^k = 0$ .  
 $U_i \equiv dX_i/d\sigma$  ist die Vierergeschwindigkeit des Schwerpunkts eines (Teil-)Systems, woraus sich  $V^i \equiv c U^i/U^0 = (c, \vec{V})$  als dessen gewöhnliche Geschwindigkeit ergibt.
- $a_k \equiv (\phi, -\vec{a})$  sind die *mikroskopischen* elektromagnetischen Potentiale ( $a^k$  ist der 4-divergenzfreie Anteil von  $\tilde{a}^k$ , d.h. es gilt  $\partial_k a^k = 0$ ).  
 $A_k \equiv (\phi, -\vec{A})$  sind die *makroskopischen* elektromagnetischen Potentiale ( $A^k$  ist der 4-divergenzfreie Anteil von  $\tilde{A}^k$ , d.h. es gilt  $\partial_k A^k = 0$ ).  
 $\partial_k s \equiv s_k$  ist der 4-rotationsfreie Anteil der erweiterten *mikroskopischen* Potentiale  $\tilde{a}_k$  (wegen  $\partial_i s_k - \partial_k s_i \equiv 0$ ).  
 $\partial_k S \equiv S_k \equiv -P_k = -M_0 c U_k$  ist der 4-rotationsfreie Anteil der erweiterten *makroskopischen* Potentiale  $\tilde{A}_k$  (wegen  $\partial_i S_k - \partial_k S_i \equiv 0$ ).  
 $\tilde{s}_i^K \equiv s_i^K + e_K/c \cdot a_i^K$  sind die Ableitungen des mikroskopischen Wirkungsskalars  $s^K$  eines Teilchens K erweitert um die Potentialsumme über  $\bar{K}$ .  
 $\tilde{S}_i^K \equiv S_i^K + e_K/c \cdot A_i^K$  sind die erweiterten Ableitungen des makroskopisch geglätteten Wirkungsskalars  $S_K$  eines herausgegriffenen Teilchens K

$\tilde{a}_k \equiv a_k + c/e \cdot \partial_k S$  sind die erweiterten mikroskopischen Potentiale.  
 $\tilde{A}_k \equiv A_k + c/e \cdot \partial_k S$  sind die erweiterten makroskopischen Potentiale.  
 $p_i \equiv (\varepsilon/c, -\vec{p}) = {}^1/c \int \mathbf{T}_i^0 dV$  ist der mikroskopische Energie-Impuls-Vierervektor ausgedehnter, (zeitweilig) abgeschlossener (Teil-)Systeme (aber  $\mathbf{p}^{kl}$ , s. u.). Statt  $\varepsilon$  wird gelegentlich auch  $W \equiv \int \mathbf{T}_0^0 dV$  verwendet.  
 $P_i = M_0 c U_i \equiv -\partial_i S$  ist der makroskopische Energie-Impuls-Vierervektor eines (zeitweilig) abgeschlossenen (Teil-)Systems (aber  $\mathbf{P}^{kl}$ , s. u.).  
 $i^k$  ist die DIRAC-Stromdichte, welche gemäß der wohlbekannten GORDON-Zerlegung die KLEIN-GORDON-Stromdichte  $\tilde{j}^k$  enthält.

... und Dichten:

$\tilde{\mathbf{j}}_K^l \equiv (\tilde{\rho}_K, {}^1/c \tilde{\mathbf{j}}_K) \equiv \rho_K \tilde{u}^l$  ist die elektrische Viererstromdichte wobei mit  $\partial_k \tilde{j}_K^k = 0$  gilt  $\int \tilde{\rho}_K dV = \pm Ze$ .  
 $\mathbf{J}^k \equiv (\rho, {}^1/c \mathbf{j}) = \rho_0 U^k$  ist die makroskopische Viererstromdichte.  
 $\tilde{\pi}^k = \mu_0 \tilde{u}^k$  ist die mikroskopische Ruhmassenstromdichte mit  $\tilde{\pi}^0 = \mu_0 \tilde{u}^0 \equiv \tilde{\mu}_0$ , wobei im Falle  $\partial_k \tilde{\pi}^k = 0$  gilt  $\int \tilde{\mu}_0 dV = m_0$ .  
 $\Pi^k = \mu_0 U^k$  ist die makroskopische Ruhmassenstromdichte.

Symmetrische Tensoren

$\gamma_{ik} \equiv g_{ik} - \eta_{ik}$  Gravitationspotentiale der allgemeinen Relativitätstheorie für welche bei geeigneter Koordinatenwahl näherungsweise Wellengleichungen gelten, deren Quellen durch die vollständige Energie-Impuls-Bi-Tensordichte  $\mathbf{V}^{ik}$  (bzw.  $\mathbf{v}^{ik}$ ) gegeben sind.  
 $R_{ik}$  RICCI-Tensor ( $\equiv g^{lm} R_{limk}$ , mit dem RIEMANN-Tensor  $R_{limk}$ ),  
 $E_{ik}$  EINSTEIN-Tensor ( $\equiv R_{ik} - {}^{1/2} R g_{ik}$ ),  
 $K_{ik}^{(\text{konv})} = \mu_0 c^2 U_i U_k$  ist der phänomenologische Energie-Impuls-Tensor der Materie, woraus  $K_{ik} = M_{ik} + Q_{ik}$  folgt (s. u.)

... und Dichten:

$\mathbf{T}_{ik}$  Energie-Impuls-Tensordichte der ponderablen Materie; diese schließt die Beiträge aller Felder mit Ausnahme des Gravitationsfeldes ein  
 $\mathbf{L}_{ik}$  Energie-Impuls-Tensordichte der elektromagnetischen Felder  
 $\mathbf{M}_{ik}$  Energie-Impuls-Tensordichte der Strömung  
 $\mathbf{Q}_{ik}$  Energie-Impuls-Tensordichte der Gestalt  
 $\mathbf{v}^{ik}$  eine alternative Energie-Impuls-Bi-Tensordichte mit Beiträgen des Gravitationsfeldes (s. z. B. [24]; dagegen ist die klassische vollständige Energie-Impuls-Bi-Tensordichte  $\mathbf{V}^{ik}$  i.a. unsymmetrisch, s. u.).

Antisymmetrische Tensoren

$f_{kl}^K \equiv a_{kl}^K - a_{lk}^K$  ist der mikroskopische elektromagnetische Feldstärketensor eines Teilchens mit der Ladung  $e_K$ .  
 $F_{kl} (\equiv A_{kl} - A_{lk})$  ist der *makroskopisch gemittelte* elektromagnetische Feldstärketensor der konventionellen Elektrodynamik im Vakuum ( $A_i$  sind die zugehörigen Potentiale).

... und Dichten:

$\mathbf{f}_K^{kl} \equiv \sqrt{g} g^{kr} g^{ls} f_{rs}^K$  ist die mikroskopische elektromagnetische Feldtensordichte eines Teilchens mit der Ladung  $e_K$ .  
 $\mathbf{F}^{kl} \equiv \sqrt{g} g^{kr} g^{ls} F_{rs}$  ist die *makroskopisch gemittelte* elektromagnetische Feldtensordichte der konventionellen Elektrodynamik im Vakuum.  
 $\mathbf{p}_K^{kl}$  Tensordichte der mikroskopischen elektromagnetischen Polarisation,  
 $\mathbf{P}^{kl}$  Tensordichte der *makroskopisch gemittelten* Polarisation.  
 $\mathbf{h}_K^{kl} \equiv \mathbf{f}_K^{kl} + \mathbf{p}_K^{kl}$  ist die Tensordichte des mikroskopischen elektromagnetischen Quellenfeldes eines Teilchens mit Eigendrehimpuls.  
 $\mathbf{H}^{kl} \equiv \mathbf{F}^{kl} + \mathbf{P}^{kl}$  ist die Tensordichte des *makroskopisch gemittelten* Quellenfeldes der konventionellen Elektrodynamik.

*Teilsymmetrische  
Bi-Tensordichte:*

$\mathbf{V}^{ik}$  (mit  $\partial_k \mathbf{V}^{ik} \equiv 0$ ) ist die aus dem Variationsprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie resultierende vollständige Energie-Impuls-Bi-Tensordichte für Materie *und* Gravitationsfeld (diese ist i.a. unsymmetrisch).

*komplexer Schrödinger-Skalar:*

$\psi \equiv q e^{is/\hbar}$  – die Deutung dieser Größe als Wahrscheinlichkeitsamplitude ist widerspruchsfrei nur in der nicht-relativistischen Quantenmechanik möglich.

*Stationaritäts-Parameter:*

$\varepsilon_{K_V}$  bedeutet in Zuständen mit  $s_{K_V} \equiv -\varepsilon_{K_V} t + s(\vec{r})_{K_V}^{\text{Rest}}$  zunächst einen konstanten Stationaritäts-Parameter, der sich als Energie erweist (s. 7.1).  $E$  wird in der Regel im Sinne der Zerlegung  $\varepsilon \equiv m_0 c^2 + E$  als die Energie eines Teilchens ohne dessen Ruhenergie benutzt.

*Dirac-Spinor:*

$\Psi \equiv (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ , mit  $\bar{\Psi}$  als dem adjungierten Gegenstück

*Kovariante  $\gamma$ -Einheiten:*

$\gamma_k$  Matrix-Konstanten der kovariant formulierten DIRAC-Gleichung:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Mittelwertbildung:*

Die Überstreichung physikalischer Symbole – z.B. bei  $\bar{\mathbf{T}}_i^{iL}$  – zeigt eine zeitliche Mittelwertbildung oder auch eine räumliche Glättung an, was sich jeweils aus dem Zusammenhang ergibt. Ausnahmen sind  $\bar{K}$  und  $\bar{\Psi}$  (s.o.).

Es wird das HEAVISIDE'sche Maßsystem zugrundegelegt, das sich vom cgs-System durch die Übernahme des Faktors  $4\pi$  bei der Stromdichte  $\mathbf{j}^k$  in die Tensordichte  $\mathbf{H}^{kl}$  des elektromagnetischen Feldes unterscheidet. Dementsprechend lauten die MAXWELL'schen Gleichungen in 4-dimensionaler bzw. in 3-dimensionaler Darstellung:

$$\begin{aligned} \partial_l \mathbf{H}^{kl} &= \mathbf{j}^k & \Leftrightarrow & \quad \text{div } \vec{\mathbf{D}} = \rho, \quad c \text{ rot } \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} + \dot{\vec{\mathbf{D}}}, \\ F_{ikl} + F_{kli} + F_{lik} &= 0 & \Leftrightarrow & \quad \text{div } \vec{\mathbf{B}} = 0, \quad c \text{ rot } \vec{\mathbf{E}} = -\dot{\vec{\mathbf{B}}}. \end{aligned} \quad (\text{i})$$

Die dabei zugrundegelegte Identität ist:

$$\mathbf{H}^{kl} \equiv \frac{1}{4\pi} \mathbf{H}_{(\text{cgs})}^{kl}. \quad (\text{ii})$$

Die im Rahmen des cgs-Systems für das Vakuum gebräuchliche Setzung  $H^{kl} = F^{kl}$  verlangt im HEAVISIDE'schen System die Berücksichtigung des Faktors  $1/4\pi$  je nachdem, ob  $F^{kl}$  als Quantitäts- oder  $F_{kl}$  als Intensitätsgröße auftritt (s.o.). – Wie üblich ist die Zuordnung der 3-dimensionalen Feldstärken  $\vec{E}, \vec{B}$  zu den Potentialen:

$$\vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} \equiv \text{rot } \vec{A} \quad (\text{iii})$$

mit der LOREN(T)Z-Konvention

$$\partial_k A^k = 0, \quad (\text{iv})$$

wobei diese im Rahmen der hier vorgestellten Theorie allerdings nicht mehr willkürlich ist, sondern die konkrete physikalische Zerlegung der erweiterten Potentiale zum Ausdruck bringt.

Die Unterscheidung zwischen den durch Klein- bzw. Großschreibung gekennzeichneten mikroskopischen (bzw. detaillierten) und makroskopischen (bzw. statistisch geglätteten) Größen erhebt keinen Anspruch auf strikte Anwendbarkeit. Überschneidungen in Bezug auf  $q$  oder  $\tilde{u}^i$  werden sich kaum durchgängig vermeiden lassen.

**Kosmologische Modelle**, die in Abschnitt 9.2 bzw. in Anhang B mit den seit 2004/2006 verfügbaren Supernova-Ia-Daten (SNe Ia) verglichen werden, sind:

*Steady-state Theory* (SST), erscheint in den Abbildungen als graue punktierte Linie,

*Cosmological Concordance Model* (CCM), erscheint in den Abbildungen als blaue durchgezogene Linie,

*Stationäres Universum* (SU), erscheint jeweils als rote (durchgezogene oder unterbrochene) Linie,

*Einstein-de Sitter-Modell* (EdS), erscheint in den Abbildungen als graue unterbrochene Linie,

*Strahlungsdominiertes Modell* (RDM), erscheint in den Abbildungen als graue punktierte Linie.

$H$  ist eine im Rahmen des stationären Modells nach HUBBLE zu benennende *Naturkonstante*, aus der sich in Kombination mit  $c$  und  $\gamma$  die folgenden Größen ergeben:

$T_H \equiv 1/H$  die HUBBLE-Zeit,

$R_H \equiv c/H$  der HUBBLE-Radius,

$\rho_c = 3H^2/\kappa c^2$  ist die *kritische Dichte* von Energie und Materie (nicht zu verwechseln mit  $\mu_c c^2 \equiv {}^{2/3}\rho_c$ ).

Der Ausdruck ‚in Ruhe‘ meint immer ‚... bezüglich der hinreichend großräumig homogen-isotropen Verteilung von Materie, Impuls und Energie‘, was das gleiche zu sein scheint wie ‚...bezüglich der kosmischen Hintergrundstrahlung‘

$(t^*, r^{*\alpha})$  sind die *universalen* Koordinaten, ein Stern ‚\*‘ markiert auch andere diesbezüglichen Größen;

$(t', r'^{\alpha})$  sind die *integrierten* Koordinaten, ein Strich ‚‘ markiert auch andere diesbezüglichen Größen;

$(t, r^{\alpha})$  sind die *adaptierten* Koordinaten (in Abschnitt 9.2 bzw. in Anhang B), andere diesbezügliche

Größen werden dort ebenfalls ohne spezielle Kennzeichnung ‚\*‘ oder ‚‘‘ usw. verwendet.

$(dt_{\text{SRT}}, dl_{\text{SRT}})$  sind als ‚natürliche‘ Intervalle von Eigenzeit und Eigenlänge lokal *gemeinsam* definiert durch die Beziehung  $d\sigma_{\text{SRT}}^2 = c^2 dt_{\text{SRT}}^2 - dl_{\text{SRT}}^2$ .

$\tau_{\text{SRT}} \equiv t_{\text{SRT}}(dl_{\text{SRT}}=0) < T_H$  bezeichnet die Eigenzeit als Vielfaches einer gegebenen Schwingungsdauer  $\tau$ ,

$\lambda_{\text{SRT}} \equiv l_{\text{SRT}}(dt_{\text{SRT}}=0) < R_H$  bezeichnet die Eigenlänge als Vielfaches der gegebenen Länge  $\lambda$  einer stehenden Welle (s. [2]).

$\tau \equiv \delta\tau_{\text{SRT}}$  ist die Schwingungsdauer einer Lichtwelle bzw. die *spektrale* Zeiteinheit ruhender Atomuhren,

$\lambda \equiv \delta\lambda_{\text{SRT}}$  ist die entsprechende Länge einer stehenden Lichtwelle (Ausnahme Absorptionsparameter  $\lambda_{\text{Absorption}}$ ).

$l^*, r^*$  (ohne Indizes) sind jeweils euklidische Abstände.

Das euklidische räumliche Linienelement ist  $dl^{*2} = dr^{*2} + r^{*2} d\Sigma^{*2}$ , wobei  $d\Sigma^{*2} \equiv \sin^2\vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2$  (mit  $d\Sigma^{*2} \equiv d\Sigma'^2 \equiv d\Sigma^2$ ) das Flächenelement einer Kugel vom Radius  $r^* = 1$  LE (Längeneinheit) bedeutet.

Die den oben genannten Koordinaten entsprechenden Zeitskalen sind neben der *lokalen Eigenzeit*  $\tau_{\text{SRT}}$ :

die *universale* (Koordinaten-)Zeit  $t^*$ , unendlich und unbegrenzt (eine spezielle Variante dessen, was ansonsten im Sinne einer bequemen Hilfsvariablen auch als ‚conformal time‘ bezeichnet wird, hier allerdings ausschließlich bezogen auf den Fall der Stationarität; nicht zu verwechseln mit einer alten Atomzeitskala),

die *integrierte* Koordinatenzeit  $t'$ ,  $T' \equiv T_H + t'$ ,

die *adaptierte* Koordinatenzeit  $t$ ,  $T \equiv T_H + t$  (nicht zu verwechseln mit der Spur  $T_i^i$  des Energie-Impuls-Tensors oder der absoluten Temperatur  $\Theta$ ).

Insbesondere ist  $t'$  die einfachste,  $t$  aber die beste quasi-natürliche Koordinatenzeit zur Annäherung an die heutige *lokale Eigenzeit*  $t_{\text{SRT}}$  in begrenzten Raum-Zeit-Regionen.

Hier und heute:  $r = r' = r^* = 0$  und  $t = t' = t^* = 0 \Rightarrow T_0 = T'_0 = T_H \equiv 1/H$  ( $T_0$  stimmt mit  $T'_0$  lokal überein).

$z \equiv \lambda_{\text{beobachtet}}/\lambda_{\text{emittiert}} - 1$  ist der Rotverschiebungsparameter.

$\zeta^* \equiv e^{Ht^*}$  ist der Zeitskalar des universalen stationären Linienelements.

$a \equiv a(t')$  ist der Skalenfaktor einer FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER-(FLRW-)Form.

Ein Punkt bedeutet die Ableitung nach der jeweiligen Zeitvariablen, z. B. ist  $\dot{a} = da/dt'$ .

Das HUBBLE'sche Gesetz in seiner signifikanten Form ist  $cz \approx Hl^*$  (und nicht das konventionelle  $cz \approx Hl$ ), weil  $l^*$  (im Unterschied zu  $l$ ) die charakteristische feste Entfernung (‚comoving coordinates‘) in Ruhe befindlicher Galaxien bezeichnet. Deshalb gilt in Bezug auf eine beliebige FLRW-Form:

$H_s(t') \equiv \dot{a}$  ist der *signifikante* HUBBLE-Parameter, näherungsweise  $cz \approx Hl^*$  (s. Abschn. 9.2.a), dagegen ist

$H_k(t') \equiv \dot{a}/a$  der *konventionelle* HUBBLE-Parameter (bezüglich irreführender Näherung  $cz \approx Hl'$ ).

$q(t') \equiv -a\ddot{a}/\dot{a}^2$  ist der ‚Decelerations‘-Parameter,  $q_0 \equiv q(t'=0)$  sein heutiger Wert; stationär gilt  $q^* \equiv 0$ .

Im Rahmen des CCM wird  $H_0 \equiv H_k(t'=0)$  als die gegenwärtige HUBBLE-‚Konstante‘, und  $T_0 (= T'_0)$  als das ‚Alter des Universums‘ bezeichnet, das dort gemäß  $a_{\text{CCM}}(t'_{\text{FLRW}} = -T_0) \stackrel{!}{=} 0$  ermittelt wird.

### 3. Physikalische Grundbegriffe einer *angemessenen*<sup>6)</sup> Naturphilosophie

Warum überhaupt Naturphilosophie? Ohne unbeweisbare Voraussetzungen in Form von Prinzipien, Postulaten, Axiomen läßt sich eine physikalische Theorie nicht formulieren. Über die Brauchbarkeit dieser unverzichtbaren Voraussetzungen entscheidet nachträglich immer wieder die – mit zunehmenden technischen Möglichkeiten anwachsende – experimentelle Erfahrung. Doch bei der Einordnung neuer oder noch unverstandener Sachverhalte hängt viel davon ab, mit dem richtigen Konzept an das Problem heranzugehen. Jede Auswahl von Voraussetzungen ist aber nichts anderes als eine konkrete Ausübung der Naturphilosophie. Das gilt unabhängig davon, ob sich der/die jeweilige Physiker/in dessen bewußt ist oder nicht<sup>7)</sup>.

Mathematik ist Teil der Sprache. Sprache lebt. Auch in der Physik trägt jeder sinnvolle Satz, sobald er gesagt ist, immer zur impliziten Definition der verwendeten Begriffe bei<sup>8)</sup>. Wer alle Objekte mit absoluter Präzision benennen wollte, müßte jedem Ding einen eigenen Namen geben, jeder einzelnen materiellen Struktur bis hinunter zu jedem einzelnen Staubkorn und so fort, denn keine zwei Staubkörner sind absolut gleich (von der belebten Natur ganz zu schweigen).

Die Möglichkeit, überhaupt Information auszutauschen, setzt von Anfang an den *Verzicht auf Vollständigkeit* voraus und beruht insofern auch auf der *Unschärfe* der verwendeten Begriffe. In diesem Sinne ist die Existenz großer Zahlen gleichartiger Teilchen als positive Erkenntnis zu werten – und nicht etwa als Mangel an individuellen Daten.

Angesichts des atomaren Aufbaus der Materie ist klar, daß die Beschreibung eines zusammengesetzten Körpers als ‚Massenpunkt‘ der klassischen Physik nur eine unvollständige sein kann<sup>9)</sup>. Doch noch in der Quantenmechanik wird bisher für Elementarteilchen wie das Elektron an der Abstraktion punktförmiger Objekte festgehalten – allerdings um den Preis ‚unverständlicher‘ Unschärfen. Dieses für viele Berechnungen unverzichtbar bleibende Modell wird in der hier skizzierten Theorie vertieft durch die darüberhinausgehende – von der Zielsetzung her jedoch äquivalente – Forderung: *Bei der Behandlung ausgedehnter Teilchen sollte es unter Verzicht auf Vollständigkeit möglich sein, deren Wechselwirkung konsistent zu beschreiben, ohne die veränderlichen inneren Strukturen überhaupt zu kennen.*

Ein anderes fundamentales Dilemma – nicht nur in der Physik – liegt meines Erachtens in der weitverbreiteten Gleichsetzung des überprüfbaren Gehalts einer Theorie mit ihrer Interpretation. Es ist eine Illusion zu glauben, dies sei heute grundsätzlich anders als vor 500 Jahren. Der *numerische* Erfolg aber, und sei er auch noch so überwältigend, kann für sich allein genommen niemals die Richtigkeit der jeweiligen Interpretation beweisen. Selbst eine von der begrifflichen Konzeption her letztlich unhaltbare Theorie kann, wie PTOLEMÄUS und andere gezeigt haben, numerisch außerordentlich erfolgreich sein, gegebenenfalls über Jahrhunderte. Ein hinreichend anpassungsfähiges Konzept genügt – wenn es mathematisch nur *Methode* hat! Daß in der bis heute weithin als unverständlich geltenden Quantenmechanik Überinterpretationen enthalten sind, die das eigentliche Bild verstellen, liegt geradezu auf der Hand. Der Vorbehalt der Überinterpretation betrifft aber ebenso die allgemeine Relativitätstheorie. Denn nach bisherigem Verständnis gelten beide Theorien als unvereinbar, was sie jedoch – Richtigkeit in ihrem jeweiligen Geltungsbereich vorausgesetzt – tatsächlich nicht sein können. Im Hinblick auf dieses Problem ist es die Aufgabe der Naturphilosophie, einerseits den vorhandenen Spielraum und andererseits die konzeptionellen Grenzen dieser fundamentalen Theorien aufzuzeigen, die offenbar beide in ihrer Entwicklung noch nicht endgültig abgeschlossen sind.

---

<sup>6)</sup> Die Bezeichnung ist auch im Hinblick auf das selbstverständliche Konzept gewählt, daß diese Grundbegriffe mit der Physik als einer *messenden* Experimentalwissenschaft in Einklang zu stehen haben.

<sup>7)</sup> Interessanterweise läßt sich diese Feststellung grundsätzlich nicht widerlegen, weil bereits ein solcher Versuch die *naturphilosophische* Erörterung der verwendeten Begriffe implizieren würde.

<sup>8)</sup> Daraus ergibt sich eine Verpflichtung zur intellektuellen Redlichkeit. Der/die privilegierte Naturwissenschaftler/in ist der Allgemeinheit dafür verantwortlich, nicht durch Gebrauch oder Prägung einer unnötig mißverständlichen Fachsprache Verwirrung zu stiften (s. a. Fußn. 100).

<sup>9)</sup> Meines Erachtens liegt die Aussagefähigkeit der Chaostheorie darin begründet, daß sie mit ihren numerischen Verfahren – gerade wegen der begrenzten Rechengenauigkeit – die unrealistische funktionale Glätte in den klassischen Naturgesetzen aufbricht, die es im Hinblick auf den komplexen atomaren Aufbau der Objekte eben in Wirklichkeit nicht gibt.

Hier nun mögen einige Grundbegriffe präzisiert oder auch ausdrücklich definiert werden, um – angesichts einer in dieser Form wohl nicht (mehr) erwarteten neuen Behandlung des Gegenstands – leicht vermeidbare Mißverständnisse von vornherein auszuschließen.

### 3.1 Die Existenz atomarer Systeme und die Einheit der Natur

Wie alle Grundbegriffe der Physik stellt auch der Begriff des *abgeschlossenen Systems* eine Idealisierung dar. Wären aber solche Systeme perfekt realisierbar, so gäbe es kaum die Berechtigung, an einer ganz unverzichtbaren anderen Voraussetzung festzuhalten – dem Glauben an die Einheit der Natur. Wie nämlich können einzelne, abgeschlossene Teile eine universale Gesamtheit bilden, wenn doch das Adjektiv ‚abgeschlossen‘ bedeuten sollte, daß diese Teile zueinander in keinerlei Zusammenhang stehen? Es hätte aber *physikalisch keinen Sinn*, über Bereiche zu spekulieren, die sich jeder Wechselwirkung – und damit auch für immer jeder Beobachtung – entziehen.

Die natürliche Antwort auf die oben gestellte Frage liegt darin, daß es in der Natur keine vollkommen abgeschlossene physikalischen Systeme gibt. Andererseits aber existieren *atomare* Systeme im Sinne einer sehr guten – in der Regel allerdings zeitlich begrenzten – Annäherung. Angesichts dieser Problematik scheint es angebracht, die folgenden beiden Sätze ausdrücklich zu formulieren und einander gegenüberzustellen:

*Prinzip von der Einheit der Natur* – Es gibt eine einzige physikalische Wirklichkeit, das Universum. Dieses ist nach Voraussetzung zusammenhängend.

*Existenzsatz für atomare Systeme* – Abgesehen von Gravitationswirkungen sind atomare Systeme *zeitweilig* abgeschlossen und lokalisierbar, ohne aber von einer Oberfläche räumlich scharf begrenzt zu sein. Ein atomares System *kann* bei Stoßprozessen als Ganzes reagieren.

Ohne die Einschränkungen zeitlicher Begrenzung und fehlender Oberflächen läge ein fundamentales Paradoxon in der Forderung, daß die beiden Sätze miteinander verträglich seien. Bei dem Konzept atomar abgeschlossener Systeme kann es sich jeweils nur um eine zeitweilige Idealisierung handeln, die durch sinnvollen Verzicht auf Vollständigkeit von vornherein eine *statistische* Beschreibung des physikalischen Geschehens impliziert. So sind elastische Stöße zwischen atomaren Systemen zwar möglich, doch bei hinreichender kinetischer Energie sind immer auch inelastische Stöße möglich. Demzufolge bleibt die Natur des *einzelnen* derartigen Stoßprozesses – ob elastisch oder inelastisch – in der Regel solange offen, bis dieser tatsächlich stattgefunden hat. Der damit akzeptierte Indeterminismus steht nicht im Widerspruch zum Kausalitätsprinzip.

Denn daß Determinismus und Kausalität nicht nur nicht das gleiche sind, wie oft irrtümlich angenommen, sondern sich im Gegenteil wechselseitig einschränken müssen, geht ganz unabhängig von Relativitätstheorie oder Quantenmechanik schon daraus hervor, daß der Nachweis der Kausalität die Möglichkeit voraussetzt, *willkürlich* in das Naturgeschehen einzugreifen, um dadurch etwas zu *verursachen* bzw. zu *bewirken*. Es ist klar, daß dies einer strikt deterministischen Auffassung von Anfang an widerspricht.

Weiterhin scheinen atomare Systeme mit dem *Prinzip von der Einheit der Natur* auch dadurch vereinbar, daß selbst während der für stoßfreie Phasen vorausgesetzten inneren Abgeschlossenheit zwischen ihnen noch eine Wechselwirkung besteht, die nicht auf gleiche Weise wie andere nach außen hin abgeschirmt werden kann. Dies ließe sich als Hinweis auf die Gravitation deuten. Die Unmöglichkeit gravitativer Abschirmung steht dabei nicht im Widerspruch zur Kompensation des *äußeren* Feldes im freien Fall. Unter diesem Aspekt erscheint EINSTEINS Äquivalenzprinzip – in Verbindung mit seiner Kovarianz-Bedingung gegenüber allgemeinen Koordinatentransformationen, die ja auch alle möglichen *Bewegungen* betreffen – als notwendige Voraussetzung für eine Stabilität der Strukturen frei fallender Objekte.

Moleküle bis hin zu Kristallen stellen im Sinne des oben Gesagten einfache atomare Systeme dar, wohingegen andere Objekte hier ganz allgemein als *zusammenhängende Strukturen* bezeichnet werden.

Der skizzierte Begriff des Atoms unterscheidet sich in wesentlichen Aspekten von dem kühnen, aus heutiger Sicht allerdings – im besten Sinn des Wortes – naiven Atombegriff LEUKIPPS und DEMOKRITS. Einerseits gibt es Prozesse, bei denen sich die ein Atom beschreibenden *charakteristischen Integrale* der Ruhemasse  $m_0$ ,

der Ladung  $e_0$ , und des Eigendrehimpulses  $n$  (Spin) nicht ändern<sup>10)</sup>. In solchen Situationen kann das Atom als Ganzes reagieren und etwa bei Zusammenstößen mit anderen Atomen sowohl Undurchdringlichkeit wie auch Unteilbarkeit zeigen. Eine sich ausgleichende Übertragung von Energie und Impuls auf einzelne Bestandteile bleibt dort gegebenenfalls verborgen. Andererseits aber gibt es auch Prozesse, bei denen sich ein gleiches Gebilde *nicht* als Ganzes verhält, sondern als veränderlich oder gar als teilbar erweist. Hier hört es deshalb auf, das identische Atom zu sein. Im Verlauf eines solchen Prozesses – der sich der Beschreibung im Sinne einer *stetigen* Wechselwirkung dadurch entzieht, daß ansonsten nicht vorher und nachher von *Atomen* die Rede sein könnte – wird ein neues atomares System entstehen. Unter diesem Aspekt ist bereits ein angeregtes Atom als ein *anderes* Atom zu verstehen, da sich mit der inneren Energie jedenfalls das charakteristische Integral der Ruhemasse verändert hat. Aus der Erfahrungstatsache, daß es im ursprünglichen Sinne des Wortes *Atome* gibt, folgt also keineswegs, daß sie *für immer* unteilbar sind<sup>11)</sup>.

Nun sind zwei grundsätzlich verschiedene Arten atomarer Systeme zu unterscheiden. Bei der einen handelt es sich um solche, deren zeitweilige Abgeschlossenheit sich über beliebig lange Perioden zwischen zwei – nicht unbedingt aufeinanderfolgenden – Stößen mit externen Objekten erstrecken kann (Objekte im *Grundzustand*). Bei der anderen ist die Dauer der zeitweiligen Abgeschlossenheit durch innere Prozesse statistisch begrenzt (Objekte in *angeregten Zuständen*), wobei sich der statistische Charakter einerseits aus der zwangsläufig unvollständigen Information, andererseits aus der ebenso unvollständigen Verarbeitung derselben ergibt<sup>12)</sup>. Bei *makroskopischen* Objekten, die hier als zusammenhängende Strukturen dadurch definiert sein mögen, daß sich ihnen im Sinne der Thermodynamik eine Temperatur zuschreiben läßt, sind notwendigerweise immer angeregte Zustände im Spiel, sodaß sie auch ohne externe Stoßprozesse nicht abgeschlossen bleiben können.

### 3.2 Differential und Integral als Inbegriffe von Feld und Teilchen

EINSTEINS spezielle Relativitätstheorie sagt, daß es keine *starrten Körper* gibt. Trotz plausibler Ansätze insbesondere seitens BORNs [18] – die Anwendbarkeit auf makroskopische Körper ist an EHRENFESTs [19] berühmten Paradoxon gescheitert<sup>13)</sup> – sagt sie nicht, was an deren Stelle zu treten hat. Doch an der Notwendigkeit einer relativistischen Entsprechung kann nach Überzeugung des Verf. kein Zweifel bestehen. Gleiches gilt auch für das klassische Modell des ‚elastischen Stoßes‘. Außerdem fehlt eine Antwort auf die Frage, was an die Stelle der ‚potentiellen Energie‘ zu treten hat, die es in ihrer ursprünglichen Form wegen der Unmöglichkeit instantaner Fernwirkungen ebenfalls nicht geben kann. Dies zusammenfassend ist festzuhalten, daß die klassische Mechanik bisher nur erstaunlich unvollständig in die spezielle Relativitätstheorie übertragen ist. – Wieso macht sich ein solcher Mangel nicht drastisch bemerkbar?

Bei Vernachlässigung von Gravitation, Neutrino- und Wärmestrahlung existieren als abstrakte Idealisierungen *zusammenhängende ausgedehnte Systeme*, die zeitweilig abgeschlossen sind. Diese entsprechen den physikalischen Gegebenheiten besser als das von der Kopenhagener Schule letztlich verteidigte Modell ‚Massenpunkt‘, was die Quantenmechanik in der Interpretation SCHRÖDINGERS eigentlich längst gezeigt hat. Denn natürlich existieren keine punktförmigen Teilchen. Jeder Körper ist ausgedehnt.

Daß sich beliebig zusammenhängende ausgedehnte Gebilde in mancherlei Hinsicht trotzdem wie Punktteilchen behandeln lassen, setzt vor allem die Möglichkeit einer Erfassung ihrer Massen als charakteristische Inte-

<sup>10)</sup> In diese Reihe gehört auch die mittlere lineare Ausdehnung, deren Quadrat im Rahmen der Quantenmechanik ebenfalls als *Integral* berechnet wird, allerdings mit der Einschränkung, daß diese Ausdehnung in verschiedenen Zuständen der Atome sehr unterschiedlich sein kann.

<sup>11)</sup> Es läßt sich also sagen, LEUKIPP und DEMOKRIT hatten damit recht, daß Atome unteilbar sind – allerdings nur, solange diese als solche existieren. Umgekehrt ließe sich auch sagen, LEUKIPP und DEMOKRIT hatten nicht recht, denn Atome sind zwar zeitweilig unteilbar, aber nicht für immer. – Es wäre nach meinem Verständnis eine leere Welt, die sich auf Bewegung und Zusammenstoß unzerstörbarer Kügelchen toter Materie reduzieren ließe.

<sup>12)</sup> Die Unvollständigkeit der quantenmechanischen Beschreibung durch die SCHRÖDINGER- bzw. DIRAC-Gleichung ergibt sich bereits daraus, daß sie in Interferenzversuchen bei geringer Intensität eines Neutronenstrahls gewissermaßen einzelne dieser Teilchen als DEBROGLIE-Wellen *richtig* beschreibt, ohne dabei auf deren zweifellos vorhandene innere Struktur Bezug nehmen zu müssen.

<sup>13)</sup> BORNs Versuch einer Übertragung als *relativ-starrer* Körper wirft bei näherem Hinschauen die Frage universeller Materialkonstanten auf (s. [2]).

grale voraus. Darüberhinaus existieren für nicht zusammengesetzte, *elementare Strukturen* zusätzliche beobachtbare Parameter – neben der Ruhemasse nämlich Ladung, Spin usw. – und zwar ebenfalls in Form charakteristischer Integrale, ohne daß über das Innere dieser ausgedehnten Gebilde irgendwelche Hypothesen erforderlich wären<sup>14)</sup> mit Ausnahme der einen, daß sie trotz ihrer Ausdehnung immer als Ganzes reagieren.

Was hat in einer relativistischen Mechanik an die Stelle des bewährten Modells ‚starrer Körper‘ zu treten? Es bietet sich an, diese Lücke zumindest versuchsweise durch ausgedehnte, im Sinne zeitweiliger Abgeschlossenheit *stationäre* Gebilde zu schließen, die sich einerseits annähernd starr verhalten, und deren *Teilchenparameter* andererseits bei stoßfreien Bewegungsabläufen als charakteristische Integrale unverändert bleiben.

Was aber das – analog zur klassischen kinetischen Gastheorie – makroskopisch erfaßbare statistische Verhalten atomarer Objekte betrifft, so muß es möglich sein, dieses zu beschreiben, ohne die inneren Strukturen vollständig zu kennen bzw. ohne auf diese inneren Strukturen explizit einzugehen. Das gilt jedenfalls – wie die der modernen Physik zugrundeliegende Erfahrung zu zeigen scheint – solange die Teilchenparameter von Ruhemasse, Ladung und Eigendrehimpuls als charakteristische Integrale gegeben sind. Die konventionelle Quantenmechanik benutzt dazu den Begriff der Aufenthaltswahrscheinlichkeit punktförmiger Teilchen, dem hier der Begriff der *Wechselwirkungswahrscheinlichkeit*<sup>15)</sup> *ausgedehnter Objekte* ansatzweise gegenübergestellt sei. *Eine nicht-zusammengesetzte elementare Struktur reagiert immer als Ganzes, und zwar so, daß die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit zur lokalen Ruhmassendichte proportional ist; mögliche Details innerer Abläufe bleiben in der Regel verborgen.*

Im Hinblick auf die natürliche Ausdehnung zusammen mit dem Eigendrehimpuls (Spin) könnte es sich meines Erachtens insbesondere bei stabilen Elementarteilchen um Wirbelstrukturen inhomogener Felder handeln<sup>16)</sup>. Wo diese Wirbel als einzelne auftreten und wo als assoziierte, mag hier dahingestellt bleiben.

Felder durch *Differentialgleichungen* zu beschreiben, ist seit MAXWELLS Theorie des Elektromagnetismus geradezu selbstverständlich geworden. Ein bemerkenswertes Charakteristikum von Wirbelstrukturen ist ihre im Vergleich zu kompakten Körpern völlig anders geartete – immer nur teilweise und mit Einschränkungen gegebene – Undurchdringlichkeit und Identität. Es ist klar, daß eine Theorie elementarer Wirbelstrukturen sich gewissermaßen von selbst unterteilt in eine Kinematik/Dynamik existierender Wirbel sowie eine Theorie die ‚Erzeugung und Verwandlung‘ von Wirbeln betreffend. Es ist auch leicht einzusehen, daß im erstgenannten Bereich Erzeugungs- bzw. Vernichtungsprozesse nur vom Ergebnis her, nicht aber im Detail zu interessieren brauchen, was sich mittels entsprechender Operatoren mathematisch bequem beschreiben läßt (Quantenmechanik). Im zweiten Bereich dagegen spielen andere Kräfte eine Rolle als diejenigen, welche die Wirbel als ganze vorantreiben (Teilchenphysik).

Der Begriff des *Elementarteilchens* wird nun so gefaßt, daß es sich dabei um eine (nicht zusammengesetzte) elementare Struktur handelt oder auch um ein aus nicht selbständig existenzfähigen Komponenten zusammengesetztes Gebilde, wobei in beiden Fällen für den Satz der beobachtbaren Parameter von Ruhemasse, Ladung, Spin usw. die entsprechenden charakteristischen Integrale existieren. Im diesem Sinne wäre das aus drei Quarks zusammengesetzte Proton – anders als das Elektron – zwar keine elementare Struktur, wohl aber (auch) ein elementares Teilchen.

Aus Sicht des hier Gesagten stellen einige ansonsten rätselhafte Aspekte jedenfalls keine grundsätzliche Überraschung mehr dar. Die Charakteristika von Welle und Teilchen gehören so selbstverständlich zusammen wie Differential und Integral.

<sup>14)</sup> Dabei ist selbstverständlich zu beachten, daß sich die Grenzen der Theorie weiter verschieben können.

<sup>15)</sup> Wenn Wasserdampf an einer kalten Fläche kondensiert, entstehen lokalisierbare Tröpfchen. Trotzdem wäre es ganz falsch, die Dichte des Wasserdampfs vor der Kondensation als ‚Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Wassertröpfchen‘ zu verstehen. Viel zutreffender ist in dieser Analogie tatsächlich der Begriff einer Wechselwirkungswahrscheinlichkeit, wobei sich alle bei einer solchen Wechselwirkung ablaufenden inneren Prozesse der Beobachtung – und damit auch einer unmittelbar überprüfaren Beschreibung – entziehen, *solange die verwendeten Meßgeräte nur ganze Wassertröpfchen registrieren*. Daß sich in der konventionellen Quantenmechanik der Begriff ‚Aufenthaltswahrscheinlichkeit‘ durchsetzen konnte, liegt letzten Endes daran, daß dort am Konzept fiktiver Punktteilchen festgehalten wird, denen jede natürliche räumliche Ausdehnung abgesprochen wird.

<sup>16)</sup> Mit Rücksicht auf die Trägheit der Energie ließe sich heute etwa sagen, das Feld selbst sei das Medium (‚Stoff‘), das jeweilige Teilchen darin eine Struktur (‚Form‘). – Eine solche Struktur läßt in Analogie auch an Spiralnebel denken.

### 3.3 Das Energie-Impuls-Postulat

Abgesehen von seinen charakteristischen Integralen wie Ruhemasse, Eigendrehimpuls, Ladung usw.<sup>17)</sup> wird ein atomares, zeitweilig abgeschlossenes System zusätzlich beschrieben durch seine *dynamischen* Integrale über die Dichten von Energie, Impuls und Bahndrehimpuls, die den momentanen Bewegungszustand des (Teil-) Systems bestimmen.

Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden soll, ergeben sich die Grundgleichungen der Quantenmechanik aus der Forderung eines *konsistenten*, nach Maßgabe der beteiligten Felder vollständigen *Energie-Impuls-Tensors*, und zwar im Rahmen einer notwendigerweise erweiterten Elektrodynamik oder – was letztlich auf das gleiche hinauskommt – einer allgemeinen relativistischen Mikromechanik. Dabei ist die Erfüllung gewisser Fundamentalbedingungen hinsichtlich Stetigkeit<sup>18)</sup>, Differenzierbarkeit und Integrabilität unabdingbar, was an einigen im folgenden Abschnitt kurz besprochenen dynamischen Paradoxa gezeigt werden wird. Dies läßt sich hier bereits aussprechen in einem

*Energie-Impuls-Postulat* – Als *dynamische* Integrale über die entsprechenden Komponenten der Tensordichte eines herausgegriffenen atomaren Systems bilden Energie und Impuls zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stoßprozessen – letztere einschließlich Abstrahlung oder Zerfall – einen *Vierervektor*  $(\varepsilon, p^\alpha)$  im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie. Energie und Impuls zeitweilig abgeschlossener Systeme sind also äquivalent zu Energie und Impuls frei fallender Teilchens.

Warum ist hier die Rede von einem Postulat? Handelt es sich nicht eher um eine Selbstverständlichkeit? – Behauptung: Wird nur die lokale<sup>19)</sup> Relativität der Gleichzeitigkeit konsequent in Rechnung gestellt, dann zeigt sich, daß es notwendig ist, für Energie und Impuls der abgeschlossenen Systeme die Existenz eines entsprechenden Vierervektors zu *fordern*. Diese Notwendigkeit besteht sowohl in der relativistischen Mechanik als auch in der Elektrodynamik. Bisher wird einfach vorausgesetzt, daß es möglich sei, diese Forderung zu erfüllen, ohne die Grundbegriffe Feld und Teilchen in ihrer Anwendbarkeit prinzipiell einzuschränken.

In der Mechanik haben die im Zusammenhang mit der Relativität der Gleichzeitigkeit auftretenden Schwierigkeiten ihren Ursprung in der Existenz von *Umkehrpunkten*. In der Elektrodynamik haben die Schwierigkeiten ihren Ursprung darin, daß die Integrale über Energie- und Impulsdichte bisher *keinen* Vierervektor bilden, weil der konventionelle Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes – wie bereits POINCARÉ erkannte – nicht vollständig ist.

In Abschnitt 6 wird konkret ausgeführt, daß das Energie-Impuls-Postulat in einem Variationsprinzip seinen angemessenen mathematischen Ausdruck findet. Dabei wird sich im Detail zeigen, wie nur die vollständige Variation tatsächlich zu einem konsistenten Energie-Impuls-Tensor führt, während aus unvollständigen Variationen jeweils die entsprechenden Teilkräfte resultieren. Aus dem Energie-Impuls-Postulat wird außerdem geschlossen, daß es sich bei dem Integranden des Variationsprinzips letztlich um die Ruhmassendichte des jeweiligen Gesamtsystems handeln sollte. In diesem Zusammenhang sei bereits hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der Begriff der Ruhemasse nur situationsbezogen verwendet werden kann, da bei Beteiligung inelastischer Stöße kein entsprechender Erhaltungssatz gilt. Letzteres ist ja z.B. auch der Grund für die der Bindungsenergie entsprechenden Abweichung der Ruhemasse des H-Atoms von der Summe aus Elektronen- und Protonenmasse.

Wenn eine naheliegende Erweiterung des obigen Postulats neben dem Energie-Impuls-Vierervektor auch den *Drehimpuls* eines Systems – einschließlich des charakteristischen Integrals des Eigendrehimpulses – nicht

<sup>17)</sup> Es ist eine interessante Frage, wie viele zusätzliche kontinuierliche Dichtefunktionen für das *Innere* eines abgeschlossenen Systems mit den drei charakteristischen Integralen über Ruhemasse, Eigendrehimpuls und Ladung *höchstens* vereinbar sind oder ob es dafür keine Obergrenze gibt. Die im Hinblick auf das NOETHER-Theorem zur Erfüllung entsprechender Kontinuitätsgleichungen jeweils erforderlichen neuen Symmetrien lassen hier an die begrenzte Anzahl PLATONISCHER Körper denken.

<sup>18)</sup> Angesichts der seinerzeit vorherrschenden Interpretation (Kopenhagener Deutung) liegt eine gewisse Ironie in der Tatsache, daß sich ausgerechnet die als Manifestation der Unstetigkeit geltenden Quantensprünge nicht ohne SCHRÖDINGERS Bedingung *stetiger* Lösungen aus dessen Gleichung ergeben.

<sup>19)</sup> Es genügt, die Relativität der Gleichzeitigkeit in Bezug auf *lokale* Inertialsysteme vorauszusetzen, ohne hier auf die Existenz einer *universalen* Systemzeit [20] einzugehen. In diesem Sinne sind solche Bezeichnungen zu verstehen wie ‚lokale Relativität der Gleichzeitigkeit‘ oder auch ‚lokale Gleichzeitigkeit‘.

nur lokal, sondern auch *global* erfassen soll, dann scheint es erforderlich, die EINSTEIN'sche Deutung seiner allgemeinen Relativitätstheorie zu verlassen und die auf LEVI-CIVITA zurückgehende, zuletzt von ROSEN formulierte ‚bimetrische‘ Auffassung zugrunde zu legen (s. Abschn. 9.2). Der meines Wissens bisher ignorierte banale Grund dafür liegt darin, daß sich im Rahmen der EINSTEIN'schen Auffassung außerhalb lokaler Inertialsysteme ein Drehimpuls wegen des fehlenden Vektorcharakters der Koordinaten  $x^i$  genaugenommen nicht einmal *definieren* läßt. Ich werde in dem eben erwähnten Abschnitt noch einmal kurz darauf zurückkommen.

### 3.4 Die Unterscheidung von Kosmos und Universum

Unter physikalischen Aspekten ist das *Universum* als stationär, homogen und isotrop zu betrachten. Und zwar deshalb, weil es meines Erachtens nicht gerechtfertigt wäre, ihm insgesamt Eigenschaften zuzuschreiben, die auch andere sein könnten. Denn selbst wenn es sich um astronomische Beobachtungstatsachen handelte, die sich über Tausende von Jahren immer wieder bestätigt hätten, so würde doch niemand jemals davon ausgehen können, das gesamte Universum überblickt zu haben<sup>20)</sup>.

Grundsätzlich sollten sich alle Beobachtungen – auch zukünftige – konsistent in ein *offenes* naturphilosophisches Konzept einfügen lassen. Was aber wären geeignete Voraussetzungen<sup>21)</sup> für eine diesem Anspruch genügende relativistische Kosmologie?

Die größte Stärke des gegenwärtigen *Cosmological Concordance Modells* ist vielleicht auch seine größte Schwäche: es ist trotz erstaunlich präziser Aussagen kaum falsifizierbar. Jedenfalls nicht, solange es unter teilweiser Einbeziehung unbewiesener *ad-hoc*-Hypothesen neuen astronomischen Beobachtungstatsachen immer wieder angepaßt werden kann. Eine solche Vorgehensweise ist zweifellos optimal zur Erkundung der Eigentümlichkeiten unserer möglicherweise sehr weit ausgedehnten kosmischen Umgebung – die aber sicher nicht das gesamte Universum sein muß. Es ist diese beinahe beliebige Anpassungsfähigkeit, die einer Falsifizierbarkeit entgegensteht und unwillkürlich an das lange Zeit überaus erfolgreiche System des PTOLEMÄUS denken läßt.

Andererseits ist auch das Konzept eines stationären Universums *grundsätzlich* nicht falsifizierbar. Denn allen konkreten Beobachtungen, die ein solches Modell widerlegen könnten, läßt sich mit dem Einwand begegnen, daß es sich dabei um lokale Abweichungen handelt, die über hinreichend große Skalen von Raum und Zeit nicht mehr auftreten werden. Es ist von Anfang an klar, daß sich quantitative Aussagen über das Universum als *ganzes* grundsätzlich weder beweisen, noch widerlegen – ja, letztlich nicht einmal überprüfen – lassen.

Hielte man nun an der in allen anderen Fällen berechtigten Auffassung fest, daß jedes vernünftige physikalische Modell falsifizierbar sein muß, dann könnte es ein solches in Bezug auf das Universum überhaupt nicht geben. Wenn man so will, ist also das Kriterium der Falsifizierbarkeit in diesem Fall nicht anwendbar.

Das wiederum bedeutet, daß die Kosmologie – so oder so – nicht daran vorbeikommt, sich auf ihre naturphilosophischen Grundlagen zu besinnen und daraus geeignete Vorgaben abzuleiten. Diese sollten neben der selbstverständlich erforderlichen Verträglichkeit mit den Beobachtungstatsachen auch die entscheidenden Kriterien der Einfachheit, Zweckmäßigkeit und Klarheit erfüllen. Ohne Rückgriff auf diese Kriterien wäre nicht einmal eine Entscheidung zwischen heliozentrischem und geozentrischem Weltbild möglich, wie sich gerade im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie durch eine bloße Koordinatentransformation beweisen läßt.

In der Physik ist es eine bewährte Vorgehensweise, sich der Realität von zwei Seiten anzunähern. Während das aktuelle *Cosmological Concordance (Consensus) Model* nach der induktiven Methode entwickelt wurde,

<sup>20)</sup> Es ist seltsam, dermaßen schlichte Feststellungen heutzutage ausdrücklich treffen zu müssen.

<sup>21)</sup> Die Wellenmechanik wäre vielleicht nie gefunden worden, hätte SCHRÖDINGER die Verletzung klarer, physikalisch wohl begründeter Voraussetzungen (Fundamentalbedingungen) auch nur annähernd so ‚großzügig‘ akzeptiert, wie dies – eine nüchterne, aber auch ernüchternde Feststellung – in der relativistischen Kosmologie seit ihren ersten Anfängen der Fall gewesen ist. Dies bezieht sich zunächst auf EINSTEINS ursprüngliche Inkaufnahme fehlender Eindeutigkeit (Pole, obwohl nachträglich verworfen) in Verbindung mit seiner – wie POINCARÉ bereits lange zuvor und meines Erachtens zurecht betont hatte – keineswegs zwingenden Annahme einer ‚Krümmung‘ des dreidimensionalen Raums. Oder später – die physikalisch fragwürdigste aller diesbezüglichen Hypothesen überhaupt – eine Entstehung des Raums oder ein Anfang der Zeit in einer Singularität des *gesamten* Universums (die zuletzt genannte Position betrifft die ursprüngliche Interpretation der FLRW-Kosmologie, entspricht aber wohl nicht mehr allgemein der heutigen Auffassung). Daß es sich bei solch *unnötigen* Annahmen lediglich um ‚Fiction‘ handeln könnte, folgt daraus, daß es auch ohne sie möglich ist, alle physikalisch reproduzierbaren Experimente mit exakt den gleichen numerischen Ergebnissen zu erklären.

soll in der vorliegenden Arbeit zur Kosmologie nur das gesagt werden, was sich aus der allgemeinen Relativitätstheorie zu diesem Thema deduktiv ergibt. Dazu aber braucht es Grundlagen und Voraussetzungen, wie das eigentlich selbstverständliche

*Prinzip einfachster Eigenschaften – Das Hintergrunduniversum, soweit es allein durch seine räumlich gemittelten Dichten von Materie und Energie gegeben ist, sollte durch das denkbar einfachste Modell beschrieben werden, das sich aus möglichst wenigen, klaren Postulaten ableiten läßt und durch makroskopische Naturkonstanten bestimmt ist.*

Nachdem es unmöglich ist, eine universale Dichte von Materie und Energie alleine aus den makroskopischen Naturkonstanten  $G$  und  $c$  abzuleiten, wird also eine weitere benötigt, die hier offenbar mit einer echten HUBBLE-Konstanten  $H$  zu identifizieren ist.

Es ist falsch, wenn immer wieder behauptet wird, EINSTEINS *Auffassung* von Raum und Zeit sei bewiesen durch die Vielzahl der glänzenden Bestätigungen seiner allgemeinen Relativitätstheorie. Denn es ist durchaus nicht erforderlich, irgendeine reale ‚Krümmung‘ – wenn dieses Wort mehr sein soll als ein rein mathematischer *terminus technicus* – von Raum und Zeit zu akzeptieren, um aus den EINSTEIN’schen Gleichungen alle physikalisch relevanten Schlüsse zu ziehen. Das betrifft nicht nur diejenigen Vorhersagen, die bisher tatsächlich experimentell bestätigt wurden, sondern auch diejenigen, die überhaupt jemals experimentell bestätigt werden können. Es genügt vollständig, die Einflüsse des Gravitationspotentials auf reale physikalische Objekte zu berücksichtigen, einschließlich derjenigen auf Maßstäbe und Uhren – ohne den geringsten Einfluß auf den Raum und die Zeit selbst. Dementsprechend genügt es auch, die ‚geodätischen‘ Bewegungsgleichungen lediglich im Sinne einer geometrischen Analogie zu verstehen, und zwar ohne jede Einbuße an physikalischer Aussagekraft. Für ein angemessenes Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie scheint es mir deshalb angebracht, folgendes ausdrücklich zu formulieren:

*Feststellung zur nichteuklidischen Geometrie* – Jedes Linienelement, das bei Voraussetzung fiktiver, vollkommen starrer Maßstäbe die *Krümmung eines Unterraums* beschreibt, beschreibt in identischer Form auch die Maßverhältnisse eines euklidischen Raums gleicher Dimensionszahl ohne jede Krümmung, der mit entsprechend *längenveränderlichen Maßstäben* ausgemessen wird.

Weil es demzufolge einfach unnötig ist, von einem nichteuklidischen Linienelement des dreidimensionalen Raums auf eine reale Krümmung desselben zu schließen – wie auch in Abschnitt 9 an einem anschaulichen Beispiel erläutert wird – beinhaltet das *Prinzip einfachster Eigenschaften* die

*Implikation A* – Die RIEMANN’sche (‚nichteuklidische‘) Geometrie ist das geeignete mathematische Werkzeug, um mit lokal systematisch veränderlichen – dabei lokal paarweise kongruent bleibenden – Maßstäben umzugehen, wobei trotz Verwendung nicht-starrer Maßstäbe das euklidische Linienelement innerhalb hinreichend kleiner Bereiche näherungsweise anwendbar bleibt.

Im Falle ein- oder zweidimensionaler Unterräume, die durch nichteuklidische Linienelemente beschrieben werden, bedeutet der Terminus ‚veränderlich‘ entweder gekrümmt oder gestaucht (bzw. gedehnt) oder auch beides.

Im Falle des realen dreidimensionalen Raumes aber kann der oben verwendete Begriff *veränderlich* immer nur eindeutig die Länge betreffen. Der Grund ist, daß es die zu einer wahren Krümmung notwendige vierte *räumliche* Dimension offensichtlich nicht gibt, welche gegebenenfalls dreidimensionale euklidische Hyperflächen enthalten müßte, um im unmittelbaren Vergleich mit diesen die Feststellung einer solchen Krümmung überhaupt zu erlauben. Andererseits kann jede dreidimensionale ‚räumliche Krümmung‘ immer als Beeinflussung der Länge hinreichend kleiner, gerader, lokal kongruenter Maßstäbe betrachtet werden, die von bis zu 6 symmetrischen Tensorkomponenten  $g_{\alpha\beta}$  abhängig ist, und demzufolge im allgemeinen auch von der Orientierung. Die *Implikation A* als ein Versuch, die Leistungen von GAUSS, BOLYAI, LOBATSCHESKI, RIEMANN bis hin zu EINSTEIN in *Übereinstimmung* mit den Konzepten EUKLIDS, NEWTONS, KANTS und nicht zuletzt POINCARÉs zu verstehen, wird gestützt durch die Tatsache, daß Lichtstrahlen z.B. im Gravitationsfeld der Sonne keineswegs entlang relativistischer ‚Geodäten‘ des *dreidimensionalen* Raums verlaufen! Bezeichnungen wie räumliche oder zeitliche ‚Krümmung‘ lassen sich in diesem Zusammenhang immer einfach verstehen als ‚Inhomogenität des Gravitationspotentials‘.

Auf Grundlage der EINSTEIN'schen allgemeinen Relativitätstheorie – obwohl in Kontrast zu seiner geometrischen Interpretation – scheinen zwei einfache Postulate zu genügen, um dem oben formulierten Prinzip Rechnung zu tragen:

*Postulat I* – In Bezug auf hinreichend große Skalen ist das Universum stationär, homogen und isotrop.

*Postulat II* – Abgesehen von lokalen Abweichungen ist die universale Lichtgeschwindigkeit konstant.

Ganz offensichtlich besagt *Postulat I*, daß das Universum – allumfassend im Sinne des Wortes – unabhängig von der Blickrichtung immer und überall gleich erscheinen sollte, vorausgesetzt daß alle Dichten über hinreichend große räumliche und zeitliche Skalen gemittelt sind. Das muß insbesondere auch im Hinblick auf die Rotverschiebung von Galaxien gelten, die sich offenbar bezüglich der Hintergrundstrahlung statistisch in Ruhe befinden. Gerade in dieser letzten Konsequenz unterscheidet sich *Postulat I* von dem wohlbekannten – formal gleichlautenden – ‚vollständigen kosmologischen Prinzip‘ (s. dazu Abschn. 9.2).

Nachdem angenommen wird, daß ‚unser‘ Kosmos eine von einem gemeinsamen Ursprung ausgegangene evolutionäre Entwicklung genommen hat, scheint eine Unterscheidung von Kosmos und Universum angebracht:

*Definition 1* – Der Begriff *Kosmos* bezeichne die größte Struktur gemeinsamen lokalen Ursprungs, die größer ist als unser Supercluster und diesen einschließt. Sollte solch eine Struktur nicht existieren, so wäre unser Kosmos im wesentlichen das gleiche wie das Universum, allerdings mit den Eigentümlichkeiten unserer großräumigen Umgebung.

Weiterhin ist leicht erkennbar, daß *Postulat II* die Gültigkeit einer euklidischen Lichtbahngeometrie des Universums einschließt, doch nur bei Mittelung über hinreichend große Entfernungen.

*Implikation B* – Was üblicherweise als ‚räumliche Krümmung‘ bezeichnet wird, kann immer als eine Auswirkung ausschließlich *lokaler* Inhomogenitäten der Gravitationspotentiale betrachtet werden.

Wegen *Implikation A* des *Prinzips einfachster Eigenschaften* folgt daraus, daß es genügt, jedes beliebige Linienelement der allgemeinen Relativitätstheorie immer als Aussage über den Einfluß von Gravitationspotential und Bewegung auf reale Objekte anzusehen, wobei jeweils auf absolute Systemkoordinaten des mathematischen Raums  $x^{*\alpha}$  und der mathematischen Zeit  $t^*$  Bezug zu nehmen ist. Umgekehrt aber scheint es unnötig, dem Raum selbst und der Zeit selbst – bei denen es sich deshalb auch nicht um physikalische Objekte zu handeln braucht – überhaupt irgendwelche veränderlichen Eigenschaften zuzuschreiben. Man sollte sich immer vor Augen halten, daß das, was heute als ‚Raumzeit‘ bezeichnet wird, oft nichts anderes bedeutet als *Gravitationspotential mitsamt seiner Auswirkung auf Maßstäbe und Uhren*.

Im Hinblick auf die beiden oben formulierten Postulate ist es nun möglich, universale Koordinaten eindeutig festzulegen. Die folgende Definition ist augenscheinlich konsistent:

*Definition 2* – Die *universalen* Koordinaten  $(t^*, l^{*\alpha})$  sind als diejenigen eines euklidischen Raums zu verstehen, in welchem bei einer – in Bezug auf hinreichend große Skalen – stationären, homogenen und isotropen Verteilung von Materie, Impuls und Energie die universale Lichtgeschwindigkeit  $c^* = c$  konstant ist.

Offenbar repräsentieren diese Koordinaten ein *natürlich ausgezeichnetes Bezugssystem* des Universums. Es bietet sich heute an, dieses mit dem Ruhssystem der kosmischen Hintergrundstrahlung zu identifizieren. Die ‚absoluten‘ Geschwindigkeiten von Sonne und Erde sind auf dieser Basis bekanntlich längst ermittelt. Doch braucht eine solche Zuordnung nicht notwendigerweise die einzig mögliche zu sein:

*Implikation C* – Mit Hilfe des DOPPLER-Effekts läßt sich *statistisch* immer ein ausgezeichnetes *Ruhsystem* festlegen, ganz gleich, wie weit man auch in das Universum hinausblicken mag.

Prinzipiell hätte man sich bereits mit HUBBLES Entdeckung auf eine größtmögliche Isotropie der beobachtbaren statistischen Verteilung der Rotverschiebung beziehen können, vorher auf mittlere Sternengeschwindigkeit Null. Und selbst wenn sich der uns heute bekannte evolutionäre Kosmos eines Tages als Teil eines stationären Universums aus ähnlichen und anderen Gebilden zeigen sollte – grundsätzlich sollte sich immer ein ausgezeichnetes Ruhssystem finden lassen. Ein interessantes Problem entstünde erst dann, falls es mehr als ein einziges derartiges System geben sollte, was dazu zwingen würde, im Hinblick auf die allgemein gehaltene *Definition 2* zu größeren Skalen überzugehen.

In Bezug auf die universalen Koordinaten  $(t^*, l^{*\alpha})$  handelt es sich bei den Intervallen  $(dt_{\text{SRT}}, dl_{\text{SRT}})$  um zeitweilige *lokale* Annäherungen. Innerhalb hinreichend kleiner Bereiche des Universums – und zwar in Bezug auf Raum *und* Zeit – lassen sich diese als Eigenzeit und Eigenlänge bezeichneten Intervalle mit Atomuhren und spektralen Maßstäben unmittelbar messen:

*Definition 3* – Die Intervalle  $(dt_{\text{SRT}}, dl_{\text{SRT}})$  von Eigenzeit und Eigenlänge sind in Bezug auf lokale Inertialsysteme durch das Linienelement der speziellen Relativitätstheorie *immer gemeinsam* definiert:

$$d\sigma_{\text{SRT}}^2 = c^2 dt_{\text{SRT}}^2 - dl_{\text{SRT}}^2. \quad (3,1)$$

Die allgemein benutzte Bezeichnung ‚Eigenzeit‘ ist insofern problematisch oder auch irreführend, als es ebenso gut möglich ist anzunehmen, daß es überhaupt nur die eine *universale Zeit* gibt. Aus dieser Sicht ist die ‚Eigenzeit‘ lediglich als die Anzeige von Atomuhren zu verstehen, die – synchron zu allen natürlich ablaufenden *lokalen* Prozessen – durch Gravitationspotential und Bewegung beeinflusst sind. Im Unterschied zu den allgemeinen Zeitintervallen  $t_{\text{SRT}}$  oder  $dt_{\text{SRT}}$  gegebenenfalls verschiedener Systemuhren beziehen sich die Symbole ‚ $\tau_{\text{SRT}}$ ‘ oder ‚ $d\tau_{\text{SRT}}$ ‘ immer auf die Anzeige einzelner in Ruhe befindlicher Uhren (im Falle einzelner bewegter Uhren soll es ‚ $\sigma$ ‘ bzw. ‚ $d\sigma$ ‘ heißen).

Eine entsprechende Überlegung gilt auch für die allgemein verwendete Bezeichnung der ‚Eigenlänge‘, welche gleichermaßen problematisch sein könnte insofern, als es genauso gut möglich ist anzunehmen, daß es jeweils nur die *universale Länge* gibt. Aus dieser Sicht wäre die ‚Eigenlänge‘ lediglich als die jeweilige Anzahl spektraler Maßeinheiten zu verstehen, die – wie die Abmessungen aller *lokalen* Objekte – ebenfalls durch Gravitationspotential und Bewegung beeinflusst sind.

Die Verwendung der EINSTEIN’schen Gleichungen der (allgemeinen) Relativitätstheorie wird es auf Grundlage des hier gewählten deduktiven Zugangs erlauben, das Bild eines stationären Universums zu zeichnen, das auf hinreichend großen Skalen durch die wenigsten und einfachsten Annahmen bestimmt ist, die meines Erachtens überhaupt möglich sind. In Abschnitt 9.2 wird sich zeigen, daß dieser Ansatz unmittelbar zu Ergebnissen führt, die mit den SNe-Ia-Daten im Unterschied zu anderen – bis vor wenigen Jahren noch viel diskutierten – Modellen auf Anhieb verträglich scheinen. Es wird deshalb vernünftig sein, die verhältnismäßig geringen Abweichungen von der vorausgesetzten universalen Stationarität, Homogenität und Isotropie unter die Lupe zu nehmen. Gerade solche Abweichungen sollten auf die speziellen Eigentümlichkeiten unserer ‚lokalen‘ kosmischen Umgebung schließen lassen (s. Abschn. 9.2 sowie Anhang B).

Nachdem die Lebensdauer von Sternen, Galaxien, Nebelhaufen usw. wie auch diejenige ihrer jeweiligen Vorgänger *natürlich* begrenzt ist, sollte es im Hinblick auf eine vorausgesetzte Stationarität von Zeit zu Zeit die Neubildung solcher Strukturen geben – überall im Universum, wieder und wieder – und zwar im Einklang mit einem vorläufig hypothetischen

*Prinzip der lokalen Neuentstehung – In einem nach Voraussetzung stationären Universum ist der jeweilige Anteil aller materiellen Komponenten dadurch determiniert, daß diese im Einklang mit den Gesetzen der Quantenmechanik in originären Prozessen wiederhergestellt werden – und zwar im gleichen Verhältnis, wie sie zuvor in den dafür verantwortlichen Gravitationszentren extremer Stärke verschwunden sind.*

Dies bedeutet, daß die materiellen Komponenten eines stationären Universums annähernd in gerade den gleichen Proportionen existieren müssen, wie sie ursprünglich aus dem ‘Big-Bang’-Modell gefolgert worden sind. Die dortige Berechnung benutzt meines Wissens an keiner Stelle, daß es außerhalb des jeweils betroffenen Bereichs nicht weitere solcher Ereignisse geben dürfe. Im Gegenteil scheint das hier skizzierte Szenario trotz jeweils vorübergehender lokaler Verletzung des Entropiesatzes physikalisch weniger unwahrscheinlich als eine Entstehung des gesamten Universums *unter Verletzung aller Erhaltungssätze* aus dem Nichts.

Selbstverständlich soll dieser Abschnitt nicht den Eindruck erwecken, als ob eine physikalische Theorie des Universums mit mathematischer Sicherheit begründet werden könnte. Die dahinterstehende Absicht ist, versuchsweise die Grundlagen eines relativistischen Modells für ein stationäres Hintergrunduniversum zu formulieren – und zwar nur so weitgehend wie nötig, dafür aber so unmißverständlich wie möglich.

#### 4. Dynamische Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie

Im Zusammenhang mit der Bewegung von Teilchen in abgeschlossenen Systemen treten wegen der Relativität der Gleichzeitigkeit bemerkenswerte Fragen auf. Einige der einfachsten abgeschlossenen Systeme wie ‚Teilchen in begrenztem Volumen‘ und ‚Ebener Rotator‘ wurden in [1] zur Diskussion gestellt. Dabei hat sich gezeigt, daß die entsprechenden periodischen Bewegungsabläufe, wie sie aus der klassischen Mechanik bekannt sind, mit den Forderungen der Relativitätstheorie nicht vereinbar sind, ohne jedem beliebigen ‚Beschleunigungsfeld‘ eine kontinuierlich verteilte Energie- bzw. Impulsdichte zuzuschreiben.

Die relativistische Mechanik kann deshalb keine reine Punktmechanik sein. Der klassische Teilchenbegriff erweist sich als unzulänglich, wohingegen ein im Sinne der Quantenmechanik eingeschränkter Teilchenbegriff den Erfordernissen der Relativitätstheorie – wie in den späteren Abschnitten gezeigt wird – zu genügen scheint. Im einzelnen wurde dargelegt, daß makroskopische Stoßprozesse im Rahmen der konventionellen relativistischen Mechanik nicht deterministisch beschreibbar sind, und daß sich Energie und Impuls von Bestandteilen abgeschlossener Systeme nicht nach den für freie Teilchen gültigen Formeln transformieren lassen. Die Relativitätstheorie ist ganz und gar ‚unklassisch‘ – keineswegs zu verstehen als bloß quantitativ modifizierte NEWTON'sche Mechanik.

Trotz der physikalischen Unmöglichkeit *vollkommen* abgeschlossener Systeme sowie *vollkommen* starrer Körper sollen in diesem Abschnitt entsprechend idealisierte Modelle versuchsweise vorausgesetzt werden, um die Grenzen ihrer Anwendbarkeit – oder besser die Konsequenzen ihrer Nicht-Anwendbarkeit – auszuloten.

Makroskopische abgeschlossene Systeme sind zwar grundsätzlich durch Schnitte teilbar, aber die Teile eines solchen Systems können selber nicht abgeschlossen sein. Ein abgeschlossenes System ist etwas anderes als die Summe seiner Teile. Eine in einem Behälter eingeschlossene Gasmenge ist nicht beschreibbar als die Summe freier Teilchen. Entweder Energie und Impuls des Gases samt Behälter bilden einen Vierervektor, oder Energie und Impuls jedes einzelnen – in diesem Falle freien – Teilchens. Doch schließt das eine das andere aus.

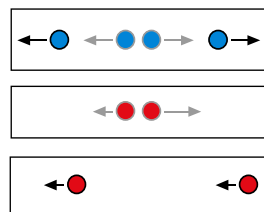


Abb. 1: Stoßende Teilchen

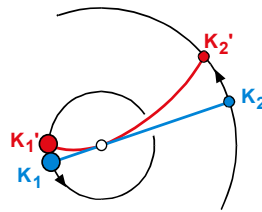


Abb. 2: Rotator

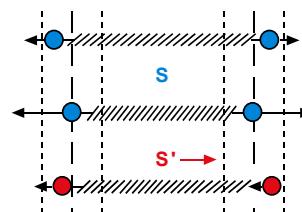


Abb. 3: Oszillator

Die dynamischen Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie beruhen darauf, daß die Umkehrpunkte bei Wechsel des Bezugssystems nicht mehr gleichzeitig erreicht werden.

Anders als die im Schwerpunktsystems S blau dargestellten Teilchen befinden sich die roten in solchen Positionen, die von einem Beobachter in S' als gleichzeitig wahrgenommen werden.

Dies scheint die Erhaltungssätze von Energie, Impuls und Drehimpuls zu verletzen.

Es ist offensichtlich, daß es sich hier gerade um Prototypen der Quantenmechanik handelt.

Der Inhalt dieses Abschnitts 4 ist in wesentlichen Teilen einem Entwurf entnommen, aus dem die Arbeit [1] entstanden ist. Die hier behandelten *dynamischen* Paradoxa der Relativitätstheorie betreffen gerade die Prototypen der Quantenmechanik, nämlich Stoßprozesse, Teilchen in begrenztem Volumen, Rotator und Oszillator. Insbesondere ergibt sich, daß selbst diese einfachen Probleme im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie bisher keineswegs gelöst sind. Deshalb kann von einem Bruch der Quantenmechanik mit einer relativistischen Mechanik definitiv nicht die Rede sein. Ganz im Gegenteil zeigt sich, daß wegen der relativistisch nicht akzeptablen Voraussetzung starrer Körper eine scharfe Trennung von Kinematik und Dynamik grundsätzlich unmöglich ist. In diesem Sinne ist die bisherige Relativitätstheorie unvollständig. Eine konsistente Behandlung erfordert es, im jeweiligen Einzelfall vom makroskopischen zum mikroskopischen Bild überzugehen.

Im Unterschied zu den wohlbekannten *kinematischen* Paradoxa werden die hier kurz wiedergegebenen dynamischen Paradoxa – die z.B. unter der unzutreffenden Voraussetzung starrer Körper die Existenz von Tachy-

onen imaginärer Ruhemasse zu beweisen scheinen<sup>22)</sup> – bis heute in ihrer Bedeutung nicht wahrgenommen, obwohl sie einen weiter unten aufgezeigten *klassischen* Zugang zur Quantenmechanik mehr als deutlich nahelegen.

#### 4.1 Erlaubt die Relativitätstheorie eine deterministische Naturauffassung?

Rückblickend wird die Relativitätstheorie immer wieder so dargestellt, als wären die Neuerungen, welche sie neben der Äquivalenz von Masse und Energie auf dem Gebiet der Mechanik gebracht hat, im wesentlichen *quantitativer* Natur. In diesem Sinne ist oft von einem Abschluß der klassischen Physik die Rede. Dagegen spricht man von einem Bruch, wenn es um die Quantenmechanik geht.

Tatsächlich unterscheidet sich die Quantenmechanik von der NEWTON'schen Theorie vor allem *qualitativ*. So hat mit BOHRs Komplementaritätsprinzip der Teilchenbegriff eine Einschränkung erfahren, die in der HEISENBERG'schen Unschärferelation wohl ihren prägnantesten Ausdruck findet. Demzufolge ist es im Rahmen dieser Theorie unmöglich, einem Teilchen, das sich in einem begrenzten Volumen bewegt, irgendeine mathematisch rekonstruierbare Bahnbewegung zwischen den Umkehrpunkten zuzuschreiben. Und ganz allgemein zeigt es sich, daß die bis dahin als selbstverständlich vorausgesetzte deterministische Naturauffassung hier keinen Platz mehr hat.

Dagegen bereitet es in der Relativitätstheorie anscheinend keinerlei Schwierigkeiten, an der Forderung nach lückenloser Beschreibbarkeit aller natürlichen Abläufe festzuhalten, und zwar ganz allgemein auch solcher, bei denen Teilchen in ihrer Bewegung auf ein endliches Volumen eingeschränkt sind. Dieser Sachverhalt wird oft so dargestellt, als hätte es die relativistische Mechanik mit der NEWTON'schen gemeinsam, daß sie eine deterministische Naturauffassung nicht nur erlaubt, sondern – auch entsprechend der späteren Auffassung EINSTEINS – geradezu voraussetzt. Die Relativitätstheorie ist also nach Meinung vieler Quantenphysiker der ‚klassischen‘ Physik zuzurechnen. Diese Auffassung teile ich nicht.

In einer Arbeit von 1907 kommentiert EINSTEIN [21] die zwei Jahre zuvor gefundene Beziehung  $\Delta E = \Delta mc^2$ . Er fragt: „Führen nicht andere spezielle Fälle zu mit der genannten Annahme unvereinbaren Folgerungen?“ und fährt fort: „Die allgemeine Beantwortung der aufgeworfenen Frage ist darum vorläufig nicht möglich, weil wir ein vollständiges, dem Relativitätsprinzip entsprechendes Weltbild einstweilen nicht besitzen.“ – Bekanntlich hat sich der oben erwähnte Zusammenhang zwischen Masse und Energie seit damals unzählige Male als richtig erwiesen und steht längst außer Zweifel. Wie aber im folgenden anhand einiger Beispiele gezeigt werden soll, kann von einem „vollständigen, dem Relativitätsprinzip entsprechenden Weltbild“ bis heute nicht die Rede sein. Bei der Bewegung von Teilchen in abgeschlossenen Systemen treten nämlich im Zusammenhang mit der Relativität der Umkehrzeiten Probleme auf, bei deren Diskussion sich erweisen wird, daß eine fertig ausgebildete relativistische Mechanik sicher nicht als ‚Abschluß‘ der klassischen Mechanik verstanden werden kann.

In der zitierten Arbeit von 1907 hat EINSTEIN gezeigt, daß die Existenz eines starren Körpers mit dem Kausalitätsprinzip unvereinbar sei, weil sonst Wirkungen ihren Ursachen vorausgehen könnten. Dazu betrachtet er einen Stab in seinem Schwerpunktsystem S, auf dessen Enden „für ganz kurze Zeit entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken“. Aufgrund der Relativität der Gleichzeitigkeit, aufgrund der Tatsache also, daß die beiden Kraftwirkungen von einem anderen, gegen das Schwerpunktsystem S bewegten Inertialsystem aus beurteilt, zu verschiedenen Zeiten stattfinden, sieht sich EINSTEIN „genötigt, bei Einwirkung des Impulses in A (linkes Stabende) eine Zustandsänderung unbekannter Qualität im Körper anzunehmen, welche sich mit endlicher Geschwindigkeit in demselben ausbreitet und in kurzer Zeit eine Beschleunigung des Körpers bewirkt, falls innerhalb dieser Zeit nicht noch andere Kräfte auf den Körper wirken, deren Wirkung die der erstgenannten kompensieren.“ EINSTEIN geht auf dieses Problem nicht weiter ein, sondern beläßt es bei der Feststellung, daß man „noch weit davon entfernt [ist], eine Dynamik der Paralleltranslation des starren Körpers zu besitzen“. Um zu zeigen, daß eine zukünftige relativistische Dynamik, wie sie hier angesprochen wird, nicht deterministisch sein kann, genügt es, das von EINSTEIN diskutierte Beispiel ein wenig zu modifizieren.

<sup>22)</sup> Dies wird in [1] explizit nachgewiesen. Es ist selbstverständlich kein Zufall, daß es sich bei der Überlichtgeschwindigkeit dieser hypothetischen Tachyonen gerade um die Phasengeschwindigkeit entsprechender DE BROGLIE-Wellen handelt.

Dazu denke man sich die Krafteinwirkungen so zustande gekommen, daß zwei Körper gleicher Massen und entgegengesetzt gleicher Impulse an den beiden Stabenden gleichzeitig *elastisch* stoßen. Vom Standpunkt der NEWTON'schen Mechanik handelt es sich hier um einen denkbar einfachen Prozeß, bei dem auf den Stab insgesamt weder Energie noch Impuls übertragen wird.

Wie hätte aber ein entsprechender Prozeß abzufließen, wenn die ganze Angelegenheit relativistisch betrachtet wird? Wegen der augenscheinlichen Symmetrie dieses Vorgangs ist von vornherein klar, daß der Stab insgesamt keinen Impuls aufnehmen kann. Wie aber steht es mit der Energie?

1. *Antwort:* Da es sich um einen elastischen Stoß handeln soll, nimmt der Stab selbstverständlich keine Energie auf, d.h. er verhält sich so, wie es auch aufgrund der klassischen Physik zu erwarten ist.

1. *Einwand:* Das kann nicht richtig sein. Angenommen, jeder der beiden Stöße nimmt eine gewisse Zeitspanne  $\Delta t$  in Anspruch. Dann denke man sich den Stab von solcher Länge  $L$ , daß während der Stoßwechselwirkung an einem der beiden Enden kein von dort ausgehendes Signal das andere Stabende erreichen kann; d.h. es soll gelten  $L > c\Delta t$ . Unter dieser Voraussetzung handelt es sich bei beiden Stößen jedenfalls um raumartige Prozesse, deren zeitliche Reihenfolge je nach Bezugssystem unterschiedlich beurteilt werden muß. Zwischen solchen Prozessen gibt es keinen kausalen Zusammenhang. Das aber bedeutet: Die beiden stoßenden Körper müssen auf die entsprechenden Stabenden eine Energiemenge übertragen, die ganz unabhängig davon ist, ob am entgegengesetzten Stabende ein Stoß erfolgt oder nicht. Letztlich ergibt sich aber daraus, daß der Stab an beiden Enden einen – allerdings gleichen – Energiebetrag aufnimmt; und weil sich dabei sein Bewegungszustand nicht verändert, kann von einem ‚elastischen Stoß‘ gar keine Rede sein.

2. *Antwort:* Dann verhält es sich möglicherweise so, daß bei Gebilden, deren lineare Ausdehnung  $L$  eine gewisse kritische Länge  $L^* = c\Delta t$  überschreitet, elastische Stöße in der oben dargestellten Art nicht möglich sind. Es wäre allerdings auch denkbar, daß die Stoßdauer  $\Delta t$  mit der Ausdehnung  $L$  der betreffenden Gebilde in einem solchen Zusammenhang steht, daß der Fall  $L > c\Delta t$  gar nicht eintreten kann.

2. *Einwand:* Die zweite der eben ins Auge gefaßten Möglichkeiten fällt von vornherein aus dem Rahmen der klassischen Physik. Und zu der ersten Möglichkeit ist zu fragen: Wenn bei Körpern, deren Ausdehnung unterhalb einer kritischen Länge  $L^*$  liegt, der hier diskutierte Prozeß ganz ‚normal‘, d.h. entsprechend der NEWTON'schen Mechanik, ablaufen könnte, bei größeren Gebilden dagegen nur noch ganz und gar inelastische Stöße möglich wären, wie hätte man sich dann den Ablauf vorzustellen, wenn die Ausdehnung  $L$  genau der kritischen Länge  $L^*$  entspricht? Sollte es mit zunehmender Stablänge  $L$  nicht einen *stetigen* Übergang vom zunächst vollkommen elastischen, bis hin zu oben beschriebenen vollkommen inelastischen Stoß geben? Dabei hätte der Stab gerade das doppelte der Energiemenge aufzunehmen, die bei einem elastischen Stoß des Stabes mit nur einem der beiden Körper auf ihn übertragen würde. Wie hätte man sich diesen Übergang vorzustellen? Hinge es aber *grundsätzlich* vom Material des Stabes ab, wieviel Energie übertragen wird, so wäre auch dies ein eklatant unklassischer Aspekt.

3. *Antwort:* Es scheint tatsächlich so zu sein, daß beim Überschreiten einer kritischen Stablänge  $L^*$  der ganze Prozeß abläuft, als würden die beiden Körper unabhängig voneinander mit dem Stab zusammenstoßen und dabei jeweils eine Energiemenge übertragen, die sich aus den Gesetzen des Zusammenstoßes für *zwei* der drei beteiligten Körper ergibt. Außerdem ist wohl tatsächlich anzunehmen, daß der Ablauf durch das *Material* beeinflusst werden könnte, weil davon auszugehen ist, daß die Stoßdauer, und damit auch die kritische Länge  $L^*$ , davon abhängen wird.

3. *Einwand:* Selbst mit der nun zugestandenen Möglichkeit des insgesamt inelastisch ablaufenden Prozesses, bei dem die beiden stoßenden Körper hinterher zwar mit verminderter, immerhin aber entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit auseinanderfliegen, kann man sich noch nicht zufriedengeben. Bisher wird nämlich einfach unterstellt, daß man wissen kann, wieviel Energie übertragen wird, wenn der Stab nur mit einem der beiden Körper zusammenstößt. Angenommen, es gibt einen solchen aus den Massen von Stab und Körper berechenbaren Energiebetrag: dann wäre es bei hinreichender Stablänge möglich, an dem einen Ende des Stabes ein Stück abzutrennen, *bevor* zwar am anderen Ende der Stoß erfolgt – aber *nach* dem Zeitpunkt, in dem ein Signal hätte starten müssen, um das andere Ende noch vor dem Zusammenstoß dort zu erreichen. Der stoßende Körper hätte also auf einen Teil des Stabes eine Energiemenge übertragen, die für den ganzen Stab wohl richtig gewesen wäre; das bedeutet aber, daß sie für den Teil des Stabes falsch sein muß.

Im Rahmen der NEWTON'schen Mechanik läßt sich ohne weiteres berechnen, wieviel Energie und Impuls auf jeden der beteiligten Körper bei einem elastischen Stoß übertragen wird, wenn nur die Massen und Geschwindigkeiten vor dem Stoß gegeben sind. Im Rahmen der Relativitätstheorie gelingt das nicht. Natürlich handelt es sich in der NEWTON'schen Mechanik um eine Idealisierung – aber für die bisherige relativistische Mechanik ist ein elastischer Stoß bei Beteiligung ausgedehnter Körper *nicht einmal als Idealisierung denkbar*. Woher sollte in unserem Beispiel einer der stoßenden Körper, der doch nur mit einem der Stoßdauer  $\Delta t$  entsprechenden Teilstück, d.h. mit einem Stück der Länge  $c\Delta t$  des Stabes Energie und Impuls austauschen kann, ‚wissen‘, was die richtigen, den ganzen Stab berücksichtigenden Energie- bzw. Impulsbeträge wären? Um nicht mit dem Kausalitätsprinzip in Konflikt zu geraten, kommen Überlichtgeschwindigkeiten für den Austausch von Signalen nicht in Betracht. Es ist bemerkenswert, daß sich gerade daraus die aufgezeigten Schwierigkeiten für eine streng deterministische Beschreibung von Stoßprozessen ergeben. Determinismus und Kausalität erweisen sich als *komplementär*. Es ist bemerkenswert, daß diese physikalische Konsequenz mit dem bereits in Abschnitt 3 auf andere Weise gefolgerten Sachverhalt übereinstimmt.

#### 4.2 Scheinbare Verletzung der Erhaltungssätze bei stationären Bewegungsabläufen

An einigen konkreten Beispielen (s. Abbn. 1–3 bzw. [1]) wird nun im Detail gezeigt, daß auch bei der Bewegung von Teilchen in einem begrenzten Volumen Probleme auftreten, die im Rahmen der ‚klassischen‘ Relativitätstheorie nicht lösbar sind. Dabei wird zunächst vorausgesetzt, daß die betreffenden Abläufe innerhalb ihres Schwerpunktsystems  $S$  in der beschriebenen Form möglich sind. Durch Übergang zu einem parallelachsigen Koordinatensystem  $S'$  mit Relativgeschwindigkeit  $v$  in Richtung der  $x$ -Achse wird dann nachgewiesen, daß die Voraussetzungen zu den Erhaltungssätzen von Energie und Impuls im Widerspruch stehen – außer man entschließt sich dazu, jedem beliebigen ‚Beschleunigungsfeld‘ eine reale Energiedichte zuzuschreiben. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Tatsache, daß es möglich ist, jedes der betrachteten stationären<sup>23)</sup> Systeme durch einen geeigneten *Schnitt* willkürlich in zwei oder mehr voneinander unabhängige abgeschlossene Systeme aufzuteilen, wobei diese Schnitte an verschiedenen Stellen zu unterschiedlichen Zeitpunkten jeweils so erfolgen sollen, daß die betreffenden Ereignisse ‚raumartig‘ zueinander liegen.

*Ein Kasten mit zwei Teilchen* (Abb. 1): Der Kasten ruhe im Schwerpunktsystem  $S$ . Zwei Teilchen fliegen darin mit entgegengesetzt gleichen Impulsen auseinander, werden gleichzeitig an den gegenüberliegenden Seitenwänden reflektiert, stoßen am Ausgangspunkt wieder zusammen usw. – der Vorgang wiederhole sich als Folge *elastischer* Stöße periodisch. Das Problem: Von  $S'$  aus betrachtet, werden die Umkehrpunkte nicht gleichzeitig erreicht. Sei  $\Delta x'$  die Distanz zweier – bezüglich  $S$  gleichzeitig erreichter – Umkehrpunkte in  $S'$ , dann fliegen dort beide Teilchen jeweils für eine Zeitspanne  $\Delta t' = (v/c^2)\Delta x'$  in die *gleiche* Richtung! Wäre der Kasten starr und hätte dementsprechend keine inneren Freiheitsgrade, so würde dies eine eklatante Verletzung von Energie- und Impulssatz bedeuten. Infolge der (lokalen) Relativität der Gleichzeitigkeit scheint es außerdem möglich, den Kasten an einer Seite unmittelbar vor dem Aufprall zu öffnen, sodaß beide Teilchen für immer in die gleiche Richtung davonfliegen.

*Teilchen in begrenztem Volumen*: Ein Kasten und ein eingeschlossenes Teilchen – beide von gleicher Masse – bewegen sich mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten  $+v$  bzw.  $-v$  im gemeinsamen Schwerpunktsystem  $S$ . Abwechselnd an linker und rechter Kastenwand finden die Reflexionen des Teilchens wiederum als Abfolge elastischer Stöße statt. Ein Problem entsteht hier beim Übergang zu *zwei* Systemen  $S'$  bzw.  $S''$ , deren Geschwindigkeiten so gewählt sind, daß sich zu jeder Zeit entweder der Kasten oder das Teilchen in Ruhe befindet. Das Teilchen gibt an der einen Wand jedesmal seine kinetische Energie ab und nimmt an der anderen Wand jedesmal den entsprechenden Energiebetrag auf, das aber bedeutet: Von  $S'$  bzw.  $S''$  aus betrachtet findet bezogen auf die Wände des Kastens ein Energietransport in *verschiedenen* Richtungen statt, der im Schwerpunktsystem von vornherein berücksichtigt werden müßte und somit in klarem Widerspruch zu dem vorausgesetzten einfachen Bewegungsablauf steht. Denn wegen der relativistischen Masse-Energie-Beziehung ist mit dem Energietransport ein zusätzlicher Impuls verbunden. Lokalisierbarkeit der kinetischen Energie vorausgesetzt, müßte sich diese in den Wänden des Kastens, und zwar immer auf Höhe des Teilchens befinden.

<sup>23)</sup> Um Verwechslungen mit andersartigen stationären Gebilden – wie z.B. in thermischem Gleichgewicht befindlichen Stoffen – zu vermeiden, würden diese gegebenenfalls als stationäre *nicht-abgeschlossene* Systeme bezeichnet.

*Linearer harmonischer Oszillator* (Abb. 3): An den beiden Enden einer Schraubenfeder führen zwei Körper beliebiger Masse im Schwerpunktsystem S harmonische Schwingungen aus. Auch hier bewegen sich beide Massen von S' aus betrachtet für Zeitspannen  $\Delta t' = (v/c^2)\Delta x'$  in die gleiche Richtung, wobei  $\Delta x'$  wieder die Distanz zwischen gegenüberliegenden Umkehrpunkten in S' ist. Der klassische Begriff der *potentiellen Energie* ist in der Relativitätstheorie bekanntlich nicht anwendbar. Diese Feststellung aber genügt nicht. Es liegt auf der Hand, daß die klassische potentielle Energie durch das Integral über die Energiedichte eines ‚Oszillator-Feldes‘ zu ersetzen sein wird, dem selbstverständlich auch eine Impulsdichte zugeschrieben werden muß.

Die Akzeptanz der Naturkonstanten  $c$  als obere Grenzgeschwindigkeit aller physikalischen Wirkungen bringt zugleich die Einführung eines jeweiligen Feldes als Träger der Wechselwirkung mit sich, das zwischen Aussendung und Ankunft eines Signals die übertragene Energie und den entsprechenden Impuls enthält. Wird nun einer der beiden Körper abgeschnitten, wenn er z. B. gerade nach außen durch seine Ruhelage geht, so muß – wie nach LORENTZ-Transformation erkennbar – der andere Körper zumindest so lange in seiner harmonischen Schwingung fortfahren, bis ein Lichtsignal die ‚Information‘ des Eingriffs übermitteln könnte. In Analogie zur Elektrodynamik ist also auch in der relativistischen Mechanik mit ‚retardierten Wirkungen‘ zu rechnen.

*Der ebene Rotator* (Abb. 2): Zwei durch einen Faden miteinander verbundene Körper drehen sich auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Bei den oben angeführten Beispielen mag man einwenden, daß über Stoßprozesse mit Beteiligung ausgedehnter – nicht unbedingt starrer, aber stationärer – Körper bzw. über das die potentielle Energie repräsentierende Feld noch nicht genug bekannt ist, um daraus weitreichende Schlüsse zu ziehen. Dieser Einwand wird beim Rotator gegenstandslos, da einem solchen Gebilde im Rahmen der klassischen Mechanik überhaupt keine potentielle Energie zukommt. Vor allem aber findet zwischen den Teilen des klassisch behandelten Rotators mit Sicherheit kein Energieaustausch statt – ganz im Gegensatz zum Rotator der Relativitätstheorie<sup>24)</sup>. Denn von S' aus beurteilt bewegen sich die beiden umlaufenden Körper zeitweilig wieder in die gleiche Richtung, was die Annahme eines in beliebiger Annäherung masselosen Fadens – oder auch nur eines Fadens zeitlich konstanter Masse – unmöglich macht.

Entweder lassen sich Energie und Impuls der beiden umlaufenden Körper nicht nach den für *freie Teilchen* gültigen Formeln transformieren, oder die Gesamtenergie darf nicht allein als kinetische Energie der Körper und des Fadens betrachtet werden – oder aber beides zugleich. Offenbar existiert selbst in diesem Fall ein Pendant zu einer *potentiellen Energie* als Integral über die Energiedichte eines ‚Rotator-Feldes‘, das die im Faden enthaltenen Spannungen repräsentiert, sodaß insgesamt dem Energie-Impuls-Postulat genügt wird. Wird aber diese potentielle Energie zur kinetischen gerechnet, so müssen sich entsprechende Abweichungen infolge dieser Verwischung der Begriffe natürlich als ‚Unschärfe‘ bemerkbar machen. Bezeichnenderweise ist gerade das in der Quantenmechanik der Fall. Dort wird die gesamte Energie des Rotators immer noch als ‚kinetische‘ betrachtet, weil *aus Sicht der NEWTON'schen Mechanik* eben keine potentielle Energie enthalten ist.

Entschließt man sich also, auch in der speziellen Relativitätstheorie an einer Beschreibung des Rotators als Gebilde masselos-gekoppelter Punktteilchen festzuhalten, so folgt die Notwendigkeit einer kontinuierlich verteilten kinetischen Energie der Teilchen, was in eklatantem Widerspruch zum Sinn der Abstraktion ‚Massenpunkt‘ steht. So bleibt nur das Konzept ausgedehnter Strukturen mit Teilchenparametern in Form charakteristischer Integrale über kontinuierliche Dichten (s. Abschn. 3.1-2).

Bei allen obigen Beispielen zeigt sich, daß ein abgeschlossenes System grundsätzlich potentielle Energie enthalten muß. Jede Wechselwirkung von Teilchen verlangt als den Träger dieser Wechselwirkung ein Feld, eine Feder, einen elastischen Faden usw. – die aber allesamt auch ihrerseits Energie und Impuls enthalten müssen.

Zusammenfassend bleibt demzufolge die Feststellung, daß selbst so einfache Probleme wie ‚Teilchen in begrenztem Volumen‘, oder ‚Rotator‘ vom Standpunkt der Relativitätstheorie keine Lösung erlauben, ohne elastische Spannungen und Deformierbarkeit von vornherein mit einzubeziehen, wobei diese wiederum nur atomistisch erklärbar sind. Sinn und Zweck der in diesem Abschnitt angestellten Überlegungen war es, zunächst eines deutlich zu machen: bereits die spezielle Relativitätstheorie ist alles andere als ‚klassisch‘. Sie ist wesentlich

<sup>24)</sup> Dieses Beispiel ist in [1] detailliert vorgerechnet und wie die übrigen anhand entsprechender Abbildungen anschaulich behandelt. Auch das EHRENFEST'sche Paradoxon der rotierenden Scheibe – obwohl es nach EINSTEIN'S Auffassung der LORENTZ-Kontraktion als rein kinematisches Problem zu betrachten sein sollte – gehört bei näherem Hinsehen [2] in die Reihe der *dynamischen* Paradoxa.

mehr als der ‚Abschluß einer Entwicklung‘, und sie ist keinesfalls zu verstehen als lediglich numerisch modifizierte NEWTON’sche Mechanik.

Daß die weitreichende Bedeutung dieser Problematik für die gesamte Physik bisher offenbar nicht erkannt wurde, liegt wohl gerade daran, daß mit ‚Teilchen in begrenztem Volumen‘, ‚Rotator‘, ‚Oszillator‘ ureigene Objekte der Quantenmechanik angesprochen sind, bei denen es sich gewissermaßen um die Prototypen der ‚modernen‘ Physik handelt. Aufgrund der beobachterabhängigen Umkehrzeiten in den jeweiligen abgeschlossenen Systemen treten die entsprechenden Modelle der Quantenmechanik hier plötzlich als ungelöste Probleme der Relativitätstheorie auf. In den folgenden Abschnitten wird sich dementsprechend die Quantenmechanik tatsächlich als *notwendige* Erweiterung von Relativitätstheorie und Elektrodynamik erweisen.

### 4.3 Ein zentrales Problem der relativistischen Mechanik

Zur Lösung der soeben besprochenen Probleme wäre nun der Versuch denkbar, zwar den beteiligten ausgedehnten Objekten wie Kasten oder Faden einen geeigneten Energie-Impuls-Spannungs-Tensor zuzuordnen, diesen aber mit den weiterhin als Massenzentren behandelten Teilchen zu kombinieren. Doch im Hinblick darauf, daß der Erfolg einer solch halbherzigen Kombination widersprüchlicher Elemente grundsätzlich fragwürdig ist, liegt es nahe, diesen dualistischen – oder eher: zwiespältigen – Ansatz von Anfang an zu vermeiden.

In diesem Sinne hat bereits V. LAUE [22] lange vor Entstehung der Quantenmechanik betont, daß sich aus der Nicht-Existenz starrer Körper die Notwendigkeit ergibt, die Dynamik des Massenzentrums aus einer ‚Kontinuumsmechanik‘ durch Grenzübergang abzuleiten. Anstelle der Energie- und Impulswerte irgendwelcher Teilchen sind entsprechende Dichten einzuführen. Wird nun verlangt, daß für die vier Dichten je eine Kontinuitätsgleichung gelten soll, dann erweisen sich diese als Komponenten eines gemischten Tensors  $T_i^k$ . Soll darüberhinaus auch ein Erhaltungssatz für den Drehimpuls gelten, so muß der zugehörige kontravariante Tensor  $T^{ik}$  bekanntlich symmetrisch sein. Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie, die wegen des Äquivalenzprinzips in – hinreichend leichten – frei fallenden lokalen Inertialsystemen Gültigkeit hat, lauten die vier Kontinuitätsgleichungen dann einfach

$$\partial_k T_i^k = 0, \quad (4,1)$$

wobei es sich also um die Erhaltungssätze von Energie und Impuls in differentieller Form handelt. Stünde auf der rechten Seite nicht Null, so würde dies eine Leistungs- bzw. Kraftdichte bedeuten, die ihre Wirkung auf den nicht durch  $T_i^k$  beschriebenen Rest eines übergeordneten Systems ausübt. Der Tensor  $T_i^k$  wäre in diesem Fall unvollständig.

Die Integration über den ganzen Raum ergibt – und zwar nur bei Erfüllung der *Fundamentalbedingungen von Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrabilität* wie aus den dynamischen Paradoxa aufgrund der lokalen Relativität der Gleichzeitigkeit klar ersichtlich – zunächst einmal zeitlich konstante Integrale für das Quadrupel der Gesamtwerte von Energie und Impuls

$$\int T_i^0 dV = \text{konstant}_i = P_i, \quad (4,2)$$

wobei sich das Quadrupel  $P_i \equiv (W/c, P_\alpha) \equiv (W/c, -\vec{P})$  schließlich, wie zu erwarten, als der im Energie-Impuls-Postulat (s. Abschn. 3.3) geforderte Vierervektor herausstellt. Ein Beweis dieses wichtigen Sachverhalts ist in expliziter Form allerdings keineswegs trivial<sup>25)</sup>. Bei der oben vorausgesetzten parallelachsigen Relativbewegung in x-Richtung wäre für das im bewegten System S' ermittelte Energieintegral  $E'$  beispielsweise zu zeigen:

<sup>25)</sup> MØLLER [23] hat einen formalen Beweis gegeben, ähnlich ist z.B. die Argumentation bei LANDAU-LIFSCHITZ [24]. Bei PAULI [16] findet sich ein Analogieschluß auf den Energie-Impuls-Tensor des freien elektromagnetischen Feldes, wobei gerade dort die Erfüllung der Fundamentalbedingungen meines Erachtens fragwürdig scheint (s. a. Fußn. 29). Ursprünglich hat V. LAUE – der 1911 das erste Lehrbuch zur Relativitätstheorie geschrieben hat (s. [22]) – einen entsprechenden Beweis geführt, der sich zwar zunächst nur auf das ‚vollständige statische System‘ beschränkt, das aber in großer Klarheit. Er selbst hat diesen Beweis dann auch auf die zeitlichen Mittelwerte beliebiger die Gleichung (4,1) erfüllender abgeschlossener Systeme ausgedehnt unter der stillschweigenden Voraussetzung, daß die Bildung dieser Mittelwerte deren Tensorcharakter nicht verletzt. Damit waren zunächst die Spezialfälle *statischer* aber auch *statistischer* Systeme erfaßt. Selbst hier aber bleibt

$$E = \gamma^2 \int \left[ T_0'^0 + \beta (T_0'^1 - T_1'^0) - \beta^2 T_1'^1 \right] dV \Big|_{t = \text{konstant}} \stackrel{!}{=} \gamma [E' + cP'] \quad (4,3)$$

mit

$$\begin{aligned} E' &= \int T_0'^0 dV \Big|_{t' = \text{konstant}}, \\ -cP' &= \int T_1'^0 dV \Big|_{t' = \text{konstant}}, \end{aligned} \quad (4,4)$$

wobei die Integration in S zu einem festen Zeitpunkt  $t = 0$  außerhalb des Koordinatenursprungs *andere* Phasen der internen Bewegungsabläufe betrifft als in S' bei  $t' = 0$ . Dies entspricht der in den Abbildungen 1–3 demonstrierten Problematik der Relativität der Gleichzeitigkeit, allerdings mit dem wesentlichen Unterschied, daß es bei (4,1) um zeitlich veränderliche *kontinuierliche* Dichten ohne Sprungstellen und Singularitäten – und insbesondere auch ohne diskrete Umkehrpunkte – geht<sup>26)</sup>.

Die folgende einfache Überlegung scheint dagegen ohne explizite Rechnung zum gewünschten Ergebnis zu führen: Es ist eine fundamentale – und mathematisch selbstverständlich erfüllte – Voraussetzung der speziellen Relativitätstheorie, daß in einem beliebigen von S verschiedenen Inertialsystem S' die zu (4,1) korrespondierende ‚gestrichene‘ Gleichung gelten muß. Auch dort existiert demzufolge ein Quadrupel zeitlich konstanter Integrale  $P'_i$  für die Werte von Energie und Impuls *desselben* abgeschlossenen Systems. Würden sich nun  $P_i$  und  $P'_i$  nicht als Vierervektoren ineinander transformieren lassen, so hätten bei Stoß- und Streuprozessen mit solchen Teilchen, die ihrerseits durch Energie-Impuls-Vierervektoren erwiesenermaßen richtig beschrieben werden, die Gesetze der ablaufenden Prozesse in verschiedenen Inertialsystemen verschieden zu sein, um nachträglich aus beiden Perspektiven S und S' eine übereinstimmende *eindeutige* Energie- und Ruhmassenbilanz der inzwischen tatsächlich eingetretenen Ereignisse zu gewährleisten. Dieser Widerspruch zum Relativitätsprinzip aber beweist die Quadrupel  $P_i$  und  $P'_i$  als Vierervektoren. Das wiederum bedeutet, daß die Erfüllung von (4,1) eine hinreichende<sup>27)</sup> Bedingung für das Energie-Impuls-Postulat darstellt.

Damit ist klar, daß die prinzipielle Lösung aller oben aufgetretenen Probleme darin liegt, die Abläufe in abgeschlossenen Systemen durch einen Energie-Impuls-Tensor  $T_i^k$  darzustellen, der (4,1) erfüllt, und zwar unter ausschließlicher Verwendung kontinuierlicher und integrierbarer Dichten, wie diese von den Fundamentalbedingungen gefordert sind.

Dann nämlich *kann* es keine Probleme mit den Erhaltungssätzen von Energie und Impuls geben – ganz gleich, wie paradox die klassische Ausgangssituation aus Sicht der speziellen Relativitätstheorie auch erscheinen mag. Außerdem wird dabei die deutlich zutage getretene Unzulänglichkeit des klassischen Teilchenbegriffs zur Beschreibung idealisierter starrer Körper von vornherein vermieden. Stattdessen wird sich erweisen, daß

a) *makroskopische* Kästen mit darin befindlichen Teilchen, Rotatoren oder Oszillatoren, zur Beantwortung der oben aufgeworfenen Fragen notwendigerweise als atomistisch zusammengesetzte Strukturen zu behandeln sind, und umgekehrt

b) *mikroskopische* Systeme in Form hypothetischer Kästen mit darin befindlichen Punktteilchen, von Fäden zusammengehaltene Rotatoren oder masselos gekoppelte Oszillatoren in dieser modellhaften Einfachheit natürlich überhaupt nicht existieren.

So werden nun die paradoxen Aspekte in der oben diskutierten Form gegenstandslos und gleichzeitig zeichnet sich ihre Auflösung ab – in den Grundlagen einer erweiterten relativistischen Mechanik.

genaugenommen noch zu zeigen, daß hinreichend scharfe zeitliche Mittelwerte der Komponenten von  $T_i^k$  in allen Fällen überhaupt existieren. Die Forderung einer Verallgemeinerung auf beliebige abgeschlossene Systeme wurde dort nicht gestellt.

<sup>26)</sup> Eine mathematische Herausforderung läge nun z. B. darin, die Gleichung (4,3) für  $E'$  – oder auch die entsprechende Gleichung für  $P'$  – bei Voraussetzung der hier zugrundegelegten LORENTZ-Transformation explizit als mathematische Konsequenz von (4,1) zu verifizieren. Für den speziellen der Quantenmechanik entlehnten Ansatz  $T_i^k(t, x^\alpha) = \tau_i^k(x^\alpha) + \varepsilon_i^k(t, x^\alpha)$  scheint dies jedenfalls möglich, solange sich jedes  $\varepsilon(t, x^\alpha)$  als Produkt  $f(t)g(x^\alpha)$  schreiben läßt. Für den analogen Nachweis der LORENTZ-Invarianz des quantenmechanischen Ladungs- bzw. Ruhmassenintegrals habe ich das explizit überprüft.

<sup>27)</sup> und innerhalb frei fallender lokaler Inertialsysteme auch notwendige

Gültigkeit der Gleichung (4,1) und die Erfüllung der wesentlichen Fundamentalbedingungen hinsichtlich Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrabilität vorausgesetzt, läßt sich schließlich auch der ‚Satz von LAUE‘<sup>28)</sup> beweisen: *Die Raum-Integrale über alle zeitlich gemittelten Komponenten eines derartigen Energie-Impuls-Tensors verschwinden im Schwerpunktsystem, außer dem Integral über  $T_0^0$ , das die gesamte im System enthaltene Energie ergibt* (s. [22]). Dieser Satz wird sich besonders auch in den Abschnitten 6.5 und 7.5 als höchst aufschlußreich erweisen.

Bisher hatte man einfach *voraussetzen*, daß es möglich sein muß, jedes beliebige abgeschlossene System durch einen Tensor  $T_i^k$  zu beschreiben, der den obigen Anforderungen genügt. Über die entscheidende Frage aber, wie denn die Existenz von *Punktteilchen* mit einem Energie-Impuls-Tensor zu vereinbaren sei, dessen Komponenten  $T_i^k$  kontinuierliche Funktionen der vier Raum-Zeit-Koordinaten sind, wird durch behelfsmäßige, hier letztlich aber unzulässige Verwendung von  $\delta$ -Funktionen in der Regel hinweggegangen. So lassen sich die Teilchen der Abbildungen 1–3 zwar mathematisch höchst einfach durch  $\delta$ -Funktionen beschreiben, ohne daß sich aber an der *physikalisch* paradoxen Situation dadurch auch nur das geringste ändert.

Wäre es tatsächlich möglich, die Existenz des Tensors  $T_i^k$  stillschweigend *voraussetzen*, der ganz ohne weiteres Gleichung (4,1) erfüllt *und* den Fundamentalbedingungen genügt, so wäre das Energie-Impuls-Postulat als eigenständige Forderung überflüssig. Doch scheint es derartige Energie-Impuls-Tensoren bisher nicht zu geben<sup>29)</sup>. – Ich behaupte nun:

*Der von der Relativitätstheorie geforderte Übergang von Teilchen zu den entsprechenden Dichten ist nichts anderes als der Übergang von der klassischen Mechanik zur Wellenmechanik*<sup>30)</sup>.

Diese Behauptung gilt unter der Voraussetzung, daß die Relativitätstheorie mit der – allerdings zu erweiternden – Elektrodynamik in Einklang bleiben muß. Auf die Unhaltbarkeit des klassischen Teilchenbegriffs hat bereits EINSTEIN nachdrücklich hingewiesen [3]. Sollen also die oben zur Diskussion gestellten Bewegungsabläufe im Sinne einer relativistischen Mechanik einwandfrei beschrieben werden, so ist es erforderlich, für das jeweils ins Auge gefaßte abgeschlossene System Energie- und Impulsdichten einzuführen, und zwar in Form „kontinuierlicher Raumfunktionen“. Die Integrale über diese Dichten haben an die Stelle von Energie- und Impulswerten irgendwelcher ‚klassisch‘ verstandenen Teilchen zu treten. Erst dadurch kann es gelingen, solch seltenen Gebilden wie ‚Tachyonen‘ zu entgehen, die im Rahmen einer reinen relativistischen Punktmechanik notwendigerweise existieren müßten.

Wie aber hat solch ein Übergang zu ‚kontinuierlichen Raumfunktionen‘ konkret vonstatten zu gehen? Nach Auffassung EINSTEINS – und zuvor MIES – sollte es eigentlich gar keine Teilchen geben, sondern lediglich ‚Knotenstellen‘ des zugrundeliegenden Feldes, in denen die Energie- und Impulsdichten besonders große Werte annehmen, ohne aber in ‚Singularitäten‘ auszuarten<sup>31)</sup>. Erweist sich diese Auffassung als richtig, so ist es genaue-

<sup>28)</sup> V. LAUE führt den Beweis unter der Überschrift „Das vollständige statische System“, wobei diese Formulierung sehr zurückhaltend gewählt ist, da er den gefundenen Sachverhalt ausdrücklich auch auf die zeitlichen Mittelwerte nicht-statischer Systeme bezieht.

<sup>29)</sup> Meines Wissens findet sich in der Literatur bisher *nicht ein einziges Beispiel* eines explizit angegebenen Energie-Impuls-Tensors  $T_i^k$ , der auch nur für ein beliebig einfaches abgeschlossenes, nicht-statisches – gegebenenfalls aber stationäres – System bei Berücksichtigung entsprechender Forderungen bezüglich Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrabilität die Gleichung (4,1) erfüllt. Dies scheint sogar die oft behauptete Überlagerung freier elektromagnetischer Felder zu einem Wellenpaket (s. a. Fußnoten 25 u. 34) zu betreffen. Angesichts ihrer dementsprechend schemenhaften Existenz erinnern solch perfekte Energie-Impuls-Tensoren bislang beinahe an Fabelwesen. – Einen Sonderfall stellt der Energie-Impuls-Tensor der allgemeinen Relativitätstheorie dar, auf den ich in Abschnitt 6.4 zurückkommen werde. Dort ist die Divergenzfreiheit des mit dem allgemeinen EINSTEIN-Tensor zusammengefaßten Bi-Tensors des Gravitationsfeldes *identisch* erfüllt, was aber zur Klärung der dynamischen Paradoxa nichts beitragen kann, weil in frei fallenden – hinreichend leichten – lokalen Inertialsystemen aufgrund des Äquivalenzprinzips einfach wieder (4,1) gelten muß. Andernfalls gilt z. B. die phänomenologische statische SCHWARZSCHILD-Lösung der Flüssigkeitskugel.

<sup>30)</sup> Diese Behauptung ist wörtlich zitiert nach dem erwähnten Entwurf und einer ersten Version von [1], die ich 1980/81 vorgelegt habe (ohne allerdings damals einen mathematischen Beweis führen zu können).

<sup>31)</sup> Die Entwicklung dieser Auffassung läßt sich mindestens zurückverfolgen bis zu den Arbeiten von MIE [6]. Die weitreichende Wirkung dieser Arbeiten manifestiert sich nicht zuletzt darin, daß sich SCHRÖDINGER in seiner grundlegenden ‚Ersten Mitteilung‘ zur Wellenmechanik auf einen mathematischen Ratschlag WEYLS bezieht, der die Möglichkeit diskreter Lösungen von Differentialgleichungen bei geeigneten Randbedingungen lange vorher in Bezug auf die MIE’sche Theorie disku-

nommen unzulässig, überhaupt von ‚abgeschlossenen‘ Systemen zu sprechen. Denn es wird dann unmöglich, zwischen dem Kasten und den darin eingeschlossenen Teilchen beliebig scharf zu unterscheiden. Auch kann die Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Bestandteilen eines solchen Systems nicht zeitlich exakt begrenzt sein, und demzufolge wäre es von vornherein ein falscher Ansatz, diese Wechselwirkung als eine Folge *klassischer* Stoßprozesse verstehen zu wollen. – Doch andererseits zeigt die Erfahrung, daß es sehr wohl einen Sinn hat, Kästen und Atome in vielen Situationen als abgeschlossene Systeme zu behandeln und die darin stattfindenden Prozesse als Zusammenspiel von Teilchen. Man hat aber lernen müssen, daß tatsächlich existierende Teilchen etwas ganz anderes sind als die Massenpunkte der klassischen Physik.

Und genau hier liegt meines Erachtens der Zugang zum Verständnis des *zentralen Problems*. Einerseits zeigt die Relativitätstheorie, daß „die physikalische Realität durch kontinuierliche Raumfunktionen zu beschreiben ist“. Andererseits lehrt die Erfahrung, daß es Teilchen gibt. Es bleibt keine andere Möglichkeit, beides miteinander zu vereinbaren, als die folgende einfache Konsequenz zu ziehen: *Die tatsächlich existierenden Teilchen sind Gebilde, die durch kontinuierliche Raumfunktionen zu beschreiben sind.*

Im Hinblick auf die naturgegebene Ausdehnung aller Dinge sollte eine solche Vorstellung eigentlich nicht weniger plausibel klingen als die Vorstellung von Massenpunkten. Allerdings liegt es auf der Hand, daß Teilchen, die durch überall stetige und differenzierbare kontinuierliche Raumfunktionen beschrieben sind, keine Oberfläche im herkömmlichen Sinne haben können. Dies bedeutet, daß sich solche Teilchen gewissermaßen überlappen, wenn nämlich ihre ‚Ränder‘ mathematisch im Unendlichen liegen. Allein daraus folgt, daß Stoßprozesse solcher Gebilde, wenn sie andererseits immer als ganze reagieren, *grundsätzlich* nur statistisch erfaßt werden können. Dazu sei noch einmal angemerkt, daß dieser – als Konsequenz der Relativitätstheorie ‚paradox‘ wirkende – Teilchenbegriff längst zur Selbstverständlichkeit geworden ist, bisher jedoch eben nur in der Quantenmechanik.

EINSTEIN trifft die Auffassung der „meisten zeitgenössischen Physiker“ genau, wenn er schreibt: *„Vor allem aber glauben sie, daß der anscheinend sprunghafte Charakter der Elementarvorgänge nur durch eine im Wesen statistische Theorie dargestellt werden kann, in welcher den sprunghaften Änderungen der Systeme durch kontinuierliche Änderungen von Wahrscheinlichkeiten der möglichen Zustände Rechnung getragen wird“* [3]. Diese Auffassung geht zurück auf BORN [25], der durch Analyse quantenmechanischer Stoßprozesse dahin gekommen ist, die Intensität der DEBROGLIE-SCHRÖDINGER-Wellen als Wahrscheinlichkeitsdichte zu interpretieren – wobei er wiederum ausdrücklich „an eine Bemerkung EINSTEINS über das Verhältnis von Wellenfeld und Lichtquanten“ angeknüpft hat.

Nach den Ausführungen dieses Abschnitts verdichtet sich der Eindruck, als sei es allein der ganz und gar unklassische Teilchenbegriff der *Quantenmechanik*, der die hier zur Diskussion gestellten Probleme der *Relativitätstheorie* zu lösen erlaubt. Und wenn es – die Vermutung wird sich im Verlauf dieser Untersuchung bestätigen – tatsächlich so ist, daß es der Quantenmechanik bedarf, um den Erfordernissen der Relativitätstheorie zu genügen, so sollte diese Erkenntnis einen Schritt zu jener Verschmelzung bedeuten, an deren Möglichkeit gerade EINSTEIN so unbeirrbar festgehalten hat.

## 5. Der Schlüssel zu einer notwendigen Erweiterung der Elektrodynamik

Nachdem alle makroskopischen Objekte aus geladenen Teilchen aufgebaut sind, ist jeder der oben zur Diskussion gestellten Prozesse immer auch Gegenstand der Elektrodynamik.

Im Interesse einer Klärung dieser Paradoxa ist es sehr aufschlußreich, eine einfache kontinuierliche Materieverteilung für makroskopische Teilchen willkürlich anzusetzen und die Problemstellung versuchsweise umzukehren. So ist es im Falle des Oszillators z.B. möglich, einen die differentiellen Erhaltungssätze (4,1) mitsamt den Fundamentalbedingungen erfüllenden Energie-Impuls-Tensor aus dem durch die NEWTON’sche Mechanik vorgegebenen Bewegungsablauf zu *rekonstruieren*. Das Dumme daran ist, daß dieses Verfahren natürlich den ‚richtigen‘ relativistischen Bewegungsablaufs mitsamt den tatsächlich auftretenden Energie-Impuls-Dichten vor-

---

tiert hat, wie aus dem entsprechenden Kapitel seines Buches ‚Raum – Zeit – Materie‘ [13] hervorgeht, das an entsprechende Überlegungen der Originalarbeiten MIES anschließt.

aussetzen müßte<sup>32)</sup>, den es aber als eindeutige makroskopische Lösung unabhängig von Materialeigenschaften überhaupt nicht gibt.

Denkt man andererseits im mikroskopischen Fall z.B. an ein rotierendes und/oder schwingendes zweiatomiges Molekül, so existieren – ebensowenig wie der ‚Kasten‘ in Abbildung 1 – überhaupt keine den Abbildungen 2 bzw. 3 entsprechenden ‚Fäden‘ oder ‚Federn‘, deren Massen bzw. Impulse vernachlässigbar wären, ganz zu schweigen von gewöhnlichen Elastizitätsmodulen als Materialkonstanten. Stattdessen gibt es hier die elektromagnetischen Felder ausgedehnter geladener Teilchen, die sich aber keinen wie auch immer gearteten Bewegungsablauf *vorschreiben* lassen.

Daß die Lösung der dynamischen Paradoxa tatsächlich in der Elektrodynamik liegen sollte, geht auch daraus hervor, daß es im Rahmen der relativistischen Mechanik nicht gelingt, die potentielle Energie konsequent einzubeziehen. Denn diese kann als Energie kein Skalar sein. Demzufolge bietet es sich geradezu an, eine Entsprechung in der zeitlichen Komponente eines Vierervektors zu suchen, was wiederum unmittelbar auf die Elektrodynamik als der so nahe liegenden Vektortheorie führt.

### 5.1 Die Unvollständigkeit der MAXWELL-LORENTZ'schen Theorie

Daß aber eine Physik auf Basis der konventionellen Elektrodynamik innere Ungereimtheiten<sup>33)</sup> enthält, ist seit langem bekannt. Diese treten auf, weil der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes *nicht vollständig* ist. Mit anderen Worten, es handelt sich bei diesem nicht um den Tensor  $T_i^k$  im Sinne der Erhaltungssätze (4,1), sondern nur um einen entsprechenden Anteil, der  $L_i^k$  heißen möge. Zwar sieht es auf den ersten Blick danach aus, als könne es zumindest im Falle des quellenfreien Vakuums keine Probleme geben, da hier die Vierer-Divergenz des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes doch tatsächlich verschwindet. Bei näherem Hinsehen zeigt sich dann aber: elektromagnetische Felder, die den MAXWELL'schen Gleichungen des Vakuums genügen, erfüllen nicht ohne weiteres zugleich auch die Fundamentalbedingungen von Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrabilität<sup>34)</sup>.

Bereits in seiner Originalarbeit zur speziellen Relativitätstheorie hat EINSTEIN [26] gezeigt, daß – nach heutigem Sprachgebrauch – Energie und Impuls eines mathematisch *herausgeschnittenen Teilvolumens* einer fortschreitenden ebenen elektromagnetischen Welle einen Vierervektor bilden (EINSTEIN weist darauf hin, daß sich Energie und Frequenz hier in gleicher Weise transformieren). Bei der entsprechenden Integration wird der Tatsache Rechnung getragen, daß sich das Teilvolumen, über das hier integriert wird, mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  bewegt. Betrachtet man aber eine zwischen den spiegelnden Wänden eines Kastens *stehende* Welle, wie sie sich als Lösung der homogenen MAXWELL'schen Gleichungen ergibt, und berechnet das Integral über die Energiedichte einmal im Schwerpunktsystem  $S$  und ein andermal im bewegten System  $S'$ , so ergeben sich richtige Transformationsformeln nur, wenn man in  $S'$  *nicht* die gesamte Energiedichte über das Kastenvolumen  $V'$  integriert, sondern die beiden Anteile – die einer nach rechts bzw. nach links laufenden Welle entsprechen – voneinander trennt, und dann so integriert, als ob es zwei mit den Geschwindigkeiten  $\pm c$  auseinanderlaufende Lichtkomplexe wären, die sich bei *verschiedener* Ausdehnung momentan teilweise durchdringen<sup>35)</sup>.

<sup>32)</sup> Ansätze der Art, daß die Abweichungen von einem relativistischen Bewegungsablauf aufgrund der konkreten Verteilung der Federmasse sowie der materialabhängigen Elastizität gerade kompensiert werden sollten, können das Problem nicht lösen.

<sup>33)</sup> Es wurde versucht, die gesamte Masse des Elektrons als elektromagnetisch induzierte Trägheit zu verstehen und daraus ein ‚elektromagnetisches Weltbild‘ zu begründen, das auch die Mechanik enthalten sollte, was in der damals angestrebten Form bekanntlich nicht gelingen konnte.

<sup>34)</sup> Räumliche ‚Wellenpakete‘, die sich in *drei* Dimensionen lokalisieren lassen, werden immer wieder als mögliche Lösungen der homogenen MAXWELL'schen Gleichungen angeführt. Ein konkretes Beispiel dafür aber ist mir nicht bekannt (was an meinem begrenzten Wissen liegen kann, s. a. Fußn. 29). Es wäre jedenfalls zu begrüßen, wenn es gelänge, entweder ein Paket ‚klassischer‘ Lichtwellen mathematisch zu konstruieren, oder aber zu beweisen, daß es solche nicht geben kann. Aus phänomenologischer Sicht steht die Existenz lokalisierbarer Lichtmengen natürlich außer Zweifel (Lichtblitz auf Blende, Laserpuls). Am ehesten scheint mir die Möglichkeit von Lichtwellenpaketen vereinbar mit dem in Abschnitt 8.2 modifizierten Modell, das aber noch der Konkretisierung bedarf.

<sup>35)</sup> Denn ein Beobachter in  $S'$  registriert, wenn er die Lösung der homogenen MAXWELL'schen Gleichungen ‚anschauen‘ könnte, nicht etwa einen vorbeifliegenden Kasten, in dem eine Welle steht, vielmehr ‚sieht‘ er einen Kasten mit zwei gegen-

Daraus läßt sich noch nicht schließen, daß die MAXWELL'schen Gleichungen nicht in der Lage wären, freie elektromagnetische Felder richtig zu beschreiben. Meines Erachtens ist die Konsequenz zunächst nur, daß der Ansatz  $j^k \equiv 0$  möglicherweise nicht zulässig ist. Wäre stattdessen z.B. für alle in Betracht kommenden Teilvolumina lediglich das Verschwinden der *Integrale* über  $j^k$  zu verlangen, dann wäre der Tensor  $L_i^k$  selbst im Falle des üblicherweise als ‚quellenfrei‘ bezeichneten Vakuums als unvollständig erwiesen.

Wenn aber stehende elektromagnetische Wellen nur unter der Voraussetzung dem Energie-Impuls-Postulat genügen, daß sie neben den homogenen MAXWELL'schen zusätzlich anderen Gleichungen genügen, kann es da überraschen, daß die Hohlraumstrahlung nicht die seinerzeit erwartete reine Wellennatur zeigt?

Auch Energie und Impuls eines einfachen Kondensator-Feldes bilden für sich allein genommen keinen Vierervektor. Wenn man aber davon ausgeht, daß bei Berücksichtigung der elastischen Spannungen – die notwendigerweise auftreten müssen, um der gegenseitigen Anziehung zweier geladener Platten das Gleichgewicht zu halten – Energie und Impuls des *vollständigen* Systems den geforderten Vierervektor bilden, dann ist zu bedenken, daß ja auch diese elastischen Kräfte letztlich nichts anderes sind als Kräfte zwischen Elektronen und Kernen vieler beteiligter Atome. Die konventionelle Elektrodynamik braucht eine Vervollständigung.

Die von FARADAY und MAXWELL begründete Nahwirkungstheorie des elektromagnetischen Felds mit kontinuierlich verteilten Ladungs- und Stromdichten wurde bekanntlich von LORENTZ [14], LARMOR [4] und POINCARÉ [27] zu einer relativistischen *Elektronentheorie* umgestaltet. Diese Theorie erwies sich insbesondere erfolgreich zur Beschreibung der damals bekannten Bewegungen von Ladungen im elektromagnetischen Feld. Wie bereits EHRENFEST ausdrücklich betont hat, stimmt die LORENTZ'sche Auffassung trotz dessen Voraussetzung eines ausgezeichneten Bezugssystem in allen experimentell überprüfbaren Konsequenzen mit der EINSTEIN'schen speziellen Relativitätstheorie exakt überein.

Doch das Elektron selbst war als geladenes Teilchen von Anfang an ein Rätsel. Es konnte nicht ‚starr‘ sein wegen der FITZGERALD-LORENTZ-Kontraktion. Gleichzeitig schien es aber, als könne es auch nicht deformierbar sein, ohne aufgrund innerer Abstoßung auseinanderzufliegen. Dies war einer der Gründe, der POINCARÉ dazu brachte, einen konstanten Druck *nicht-elektrodynamischer* Natur einzuführen, welcher das Elektron in einem entsprechenden Modell zusammenhielt. In seiner speziellen Relativitätstheorie zeigte EINSTEIN dann allerdings, daß sich sämtliche inzwischen experimentell bestätigten Schlüsse aus Verbindung von Relativitätsprinzip und (lokaler) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ziehen lassen, ohne über die innere Struktur der Elektronen und anderer Teilchen irgendwelche Voraussetzungen zu machen. Darin liegt eine besondere Stärke der speziellen Relativitätstheorie. Doch gerade in dieser rein *kinematischen Auffassung* der FITZGERALD-LORENTZ-Kontraktion liegt andererseits auch eine Schwäche, die insbesondere bei der EHRENFEST'schen rotierenden Scheibe zutage tritt. Denn wie in [2] daraus gefolgert, ist eine scharfe Trennung von relativistischer Kinematik und Dynamik grundsätzlich *nicht* möglich.

Bereits 1912 hat MIE [6] gezeigt, daß an den MAXWELL'schen Gleichungen festgehalten werden kann, ohne von Anfang an das Auftreten atomarer Gebilde auszuschließen. Er beweist nämlich, daß aus der Struktur jener Gleichungen keineswegs eine Linearität folgen muß, und er schafft damit grundsätzlich den Spielraum für eine hinreichend komplizierte elektrodynamische Wirklichkeit<sup>36)</sup>. Von ganz besonderer Bedeutung ist, daß er einen formalen Energie-Impuls-Tensor angegeben hat, der – im Falle konkreter Umsetzung und Bestätigung – nach Maßgabe seiner Voraussetzungen vollständig gewesen wäre und die Gleichung (4,1) erfüllt hätte. Man sollte sich durch MIE's spezielle Ergebnisse, die – wie sich bald herausstellte – teilweise in Widerspruch zur Erfahrung garieten, keinesfalls dazu verleiten lassen, alles an der Theorie für falsch zu halten<sup>37)</sup>. Insbesondere hat MIE er-

---

läufigen Wellenanteilen, deren einer vergleichsweise zu kurz, und deren anderer zu lang ist. Für diesen Beobachter sind die Fundamentalbedingungen jedenfalls nicht erfüllt.

<sup>36)</sup> Allerdings zeigt sich, daß seine Ansätze – die später von BORN [7] und HILBERT [8] übernommen und formal weiterentwickelt wurden – zu eng gefaßt waren, als daß sie etwa die spätere Quantenmechanik grundsätzlich hätten vorwegnehmen können. Trotzdem sind seine Arbeiten meines Erachtens ein grandioses Beispiel für ein zwar unvollkommen gebliebenes, aber dennoch außergewöhnlich fruchtbares Konzept.

<sup>37)</sup> Die Fehler liegen meines Erachtens vor allem in falschen Voraussetzungen. So glaubte er insbesondere, das Elektron als *statische* Lösung seiner Gleichungen auffinden zu müssen, um zu einer befriedigenden Elektrodynamik zu gelangen. Wie man aus der späteren Quantenmechanik aber lernen kann, gibt es keine Berechtigung, aus der Existenz elementarer Gebilde

kannt, daß die elektromagnetischen Potentiale von physikalischer Bedeutung sind, wohingegen ihnen in der bis zu dem Versuch von AHARANOV-BOHM [28] allgemein akzeptierten Elektrodynamik lediglich die Rolle einer bequemen Rechengröße zugestanden wurde.

## 5.2 Kombination mit dem phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor der Materie

Nachdem die Unvollständigkeit des elektromagnetischen Energie-Impuls-Tensors insbesondere durch POINCARÉ erwiesen war, hat sich mit der speziellen Relativitätstheorie schließlich die folgende, auf MINKOWSKI zurückgehende Auffassung durchgesetzt, die bis heute allgemein vertreten wird. Um die gewünschte Vollständigkeit zu erreichen, ist der *konventionelle* Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

$$L_i^{k(\text{konv})} \equiv -F_{il}F^{kl} + \frac{1}{4}\delta_i^k F_{lm}F^{lm} \quad (5,1)$$

um einen *phänomenologischen* Energie-Impuls-Tensor der Materie

$$K_i^{k(\text{konv})} \equiv \mu_0 c^2 U_i U^k \quad (5,2)$$

zu ergänzen, wobei wie üblich  $F_{ik}$  den elektromagnetischen Feldstärketensor,  $\mu_0$  die Ruhmassendichte und  $U^k$  die Vierergeschwindigkeit des beschleunigten Ladungselements bedeuten sollen. Bekanntlich wird mit

$$T_i^{k(\text{konv})} \equiv L_i^{k(\text{konv})} + K_i^{k(\text{konv})} \quad (5,3)$$

dann Gleichung (4,1) erfüllt, wenn – zusammen mit der Kontinuitätsgleichung der Materie  $\partial_k(\mu_0 U^k) = 0$  – zusätzlich gilt

$$F_{il}J^l = \mu_0 c^2 \frac{dU_i}{d\sigma}, \quad (5,4)$$

wo  $J^l \equiv (\rho, {}^{1/c}\vec{J})$  für die Stromdichte und  $d\sigma$  für das Linienelement der speziellen Relativitätstheorie<sup>38)</sup> stehen. Mit der linken Seite als LORENTZ-Kraftdichte entspricht (5,4) gerade dem relativistisch modifizierten NEWTON'schen Bewegungsgesetz. Diese Beziehung (5,4) hat sich als Bewegungsgleichung der Elektrodynamik – bis hin zu ultrarelativistischen Geschwindigkeiten – bestens bewährt. Eine bemerkenswerte Eigenschaft liegt allerdings darin, daß das Feld  $F_{ik}$ , das die Bewegung der geladenen Teilchen gemäß (5,4) bestimmt, nach herkömmlicher Auffassung selbst von den dadurch verursachten Strömen beeinflusst werden müßte.

Wäre nun mit  $T_i^k \equiv L_i^k + K_i^k$  die zuerst festgestellte Unvollständigkeit restlos behoben, so dürfte es bei elektrodynamischer Betrachtung der Paradoxa des Abschnitts 4 keine grundsätzlichen Probleme mehr geben. Dies ist aber nicht der Fall. Die hier in Betracht gezogene Erweiterung ergibt bei phänomenologischer Definition gemäß (5,2) lediglich eine Näherungslösung mit „aneinandergeklebten“<sup>39)</sup> Energie-Impuls-Tensoren, die keine Stabilität atomarer Strukturen – und deshalb auch nicht die Existenz irgendwelcher Festkörper wie Kästen – erklären kann. Stationäre Gleichgewichtszustände wären dabei von vornherein ausgeschlossen. Denn nach herkömmlichem Verständnis würde die LORENTZ-Kraftdichte gemäß (5,4) immer nur Beschleunigungen bewirken. Die gewünschte Vollständigkeit ist also hier nicht erreicht.

Darüberhinaus enthält die Beziehung (5,4) auch weitere Ungereimtheiten. Während die rechte Seite unvollständig ist, weil sie die Strahlungsrückwirkung beschleunigter Ladungen nicht enthält, könnte die linke Seite umgekehrt als übervollständig bezeichnet werden. Der Grund ist, daß dort nach konventionellem Verständnis die Gesamtfeldstärke  $F_{il}$  steht, wo aber im Hinblick auf die zugrundeliegende Definition – wie bereits PAULI betonte

darauf zu schließen, daß diese statisch sind. Außerdem könnte es beim einzelnen *freien* Elektron möglicherweise grundsätzlich falsch sein, überhaupt nach Kräften zu fragen, die ein „Auseinanderfliegen“ der Ladung verhindern.

<sup>38)</sup> Vorläufig werden durchgängig die – frei fallenden lokalen – Inertialsysteme der speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt, wobei sich alle Gleichungen leicht nach den üblichen Regeln auf den allgemein-relativistischen Fall umschreiben lassen.

<sup>39)</sup> eine gelegentlich von EINSTEIN benutzte Bezeichnung

– lediglich derjenige Anteil stehen sollte, der die Kraft auf die Ladung bewirkt. Hier ist also eine unzulässige ‚Selbstkraft‘ enthalten, die bei entsprechender Integration über eine Ladung im äußeren Feld zwar herausfällt, dafür aber die heikle Problematik der Selbstenergie mit sich bringt. Es ist bezeichnend, daß die Konsequenz einer – im Hinblick auf die fundamentale Definition der elektrischen Feldstärke unberechtigt eingeführten – Selbstwechselwirkung in der heutigen Quantenelektrodynamik *nachträglich* durch die bekannten, mathematisch nicht unbedenklichen Renormierungsprozesse wieder rückgängig gemacht werden muß.

Eine der elementarsten Erfahrungstatsachen überhaupt ist die Existenz fester Körper. Um den relativistisch erwiesenermaßen unzulässigen Begriff makroskopischer Starrheit zu vermeiden, sei hier lediglich festgehalten, daß es sich dabei um Strukturen handelt, die sich möglichen Deformationen im Rahmen gewisser Grenzen widersetzen. Die Atome selbst, aus denen diese Körper – wie natürlich auch alle anderen chemischen Stoffe – bestehen, sind im Zustand kleinster Ausdehnung stationär und erfahrungsgemäß strahlungsfrei. Hier wird also der LORENTZ-Kraft zwischen den Protonen eines Kerns und den Elektronen der Hülle jeweils das Gleichgewicht gehalten. – Wodurch?

### 5.3 Ein physikalischer Zusammenhang zwischen Viererstromdichte und Viererpotential

Wäre  $T_i^k \equiv L_i^k + K_i^k$  der vollständige Energie-Impuls-Tensor von Feld und Materie, dann müßte die in diesem Fall aus (4,1) resultierende Beziehung (5,4) im Hinblick auf die Existenz von Atomen in strahlungsfreien Zuständen eine Gleichgewichtsbedingung enthalten. Da die Beziehung aber noch die zuvor angesprochenen Ungereimtheiten enthält, soll sie in diesem Abschnitt etwas eingehender analysiert werden. Dabei zeigt sich tatsächlich ein *konkreter* physikalischer Zusammenhang zwischen Viererstromdichte und Viererpotential, der beinahe zwangsläufig zur Quantenmechanik als Erweiterung der Elektrodynamik führt.

Dieser Zusammenhang ergibt sich nämlich einfach aus dem LORENTZ’schen Ansatz für die Stromdichte  $\vec{J} = \rho \vec{V}$ , die in den räumlichen Komponenten des Vierervektors

$$J^l = \rho_0 U^l \quad (5,5)$$

enthalten ist. Für die zeitliche Komponente gilt dementsprechend  $\rho = \rho_0 U^0$ . Dabei ist  $\rho$  die herkömmliche,  $\rho_0$  die skalare Ladungsdichte und außerdem  $\vec{V} \equiv V^\alpha \equiv c U^\alpha / U^0$  die gewöhnliche Geschwindigkeit. Die Schreibweise in Großbuchstaben weist bei den betreffenden Variablen darauf hin, daß es sich in diesem Abschnitt zunächst um makroskopisch geglättete Größen handelt. Diese Glättung entspricht einfach dem ‚klassischen‘ Meßprozeß, zu dem in der Regel auch große Zahlen gleichartiger Teilchen statistisch beitragen. In diesem Sinne wird der explizite Ausdruck für den makroskopischen Feldstärketensor benutzt, der in Abhängigkeit von den elektromagnetischen Potentialen  $\tilde{A}_i$  lautet

$$F_{il} \equiv \tilde{A}_{il} - \tilde{A}_{li}, \quad (5,6)$$

wobei als Abkürzung  $\tilde{A}_{li} \equiv \partial_l \tilde{A}_i$  verwendet ist. Demzufolge läßt sich die Beziehung (5,4) mit Beachtung der darin enthaltenen Gleichsetzung  $dU_i/d\sigma = U^l \partial_l U_i \equiv U^l U_{li}$  nun schreiben als

$$\rho_0 U^l (\tilde{A}_{il} - \tilde{A}_{li}) = \mu_0 c^2 U^l U_{li}. \quad (5,7)$$

Diese Gleichung aber ist *identisch* erfüllt – ohne daß es sich hierbei notwendigerweise um die einzige Lösungsmöglichkeit handeln muß – wenn einerseits gesetzt wird

$$\rho_0 := e_0 \frac{\mu_0}{m_0} \equiv e_0 Q^2 \quad (5,8)$$

mit den Bezeichnungen  $m_0, e_0$  für die Konstanten von Ruhemasse und Ladung eines Teilchens sowie andererseits – und das ist neu:

$$\tilde{A}_i \stackrel{!}{=} -\frac{m_0 c^2}{e_0} U_i. \quad (5,9)$$

Die für die Vierergeschwindigkeit gültige Beziehung  $U_i U^i = 1$  impliziert nämlich

$$U^l U_{il} = \frac{1}{2} \partial_i (U^l U_l) = 0. \quad (5,10)$$

Damit aber ergibt sich schließlich als denkbar einfachster physikalischer Zusammenhang zwischen Viererstromdichte und Viererpotential

$$J^l = -\frac{e_0}{m_0 c^2} \rho_0 \tilde{A}^l. \quad (5,11)$$

Ein solcher Zusammenhang wäre aber ganz indiskutabel, gäbe es nicht die als ‚Eichinvarianz‘ bezeichnete Möglichkeit, die elektromagnetischen Potentiale gemäß

$$\tilde{A}_i \equiv A_i + \partial_i f \quad (5,12)$$

zu ersetzen, was aus meiner Sicht nichts anderes bedeutet als das *vierdimensionale* Analogon der Zerlegung eines Vektors  $\tilde{A}_i$  in einen ‚quellenfreien‘ Anteil  $A_i$ , für den gilt  $\partial_k A^k = 0$ , sowie eines ‚wirbelfreien‘ Anteils  $-f_i \equiv -\partial_i f$ , für den gilt  $\partial_k f_i - \partial_i f_k \equiv 0$ . Gerade diese Eichinvarianz könnte allerdings die Sicht verstellt haben auf den sogleich vollständig zutage tretenden Zusammenhang, indem sie eine fehlende physikalische Relevanz der elektromagnetischen Potentiale als rein mathematische Hilfsgrößen zu beweisen schien.

Mit (5,9) folgt aus  $U_i U^i = 1$  nämlich die Relation  $\tilde{A}_i \tilde{A}^i = (m_0 c^2 / e)^2$ , bei der es sich in der Tat um die HAMILTON-JACOBI-Gleichung für Teilchen im elektromagnetischen Feld handelt, wenn in (5,12) mit Rückgriff auf die klassische Wirkung  $S$  nun gesetzt wird

$$f \equiv \frac{c}{e_0} S. \quad (5,13)$$

Die Kombination der drei letzten Gleichungen ergibt mit der bereits oben vorgenommenen Substitution  $\rho_0 \equiv e_0 Q^2$ , wie sich zeigen wird, einen ‚klassischen‘ Schlüssel zur Quantenmechanik

$$J^l = -\frac{e_0}{m_0 c} Q^2 \left( \partial^l S + \frac{e_0}{c} A^l \right), \quad (5,14)$$

wovon insbesondere im nächsten Abschnitt explizit Gebrauch gemacht wird. Es ist klar, daß der hier verwendete reelle Skalar  $Q$ , seiner Definition in (5,8) gemäß, die Form der Ladungs- bzw. Ruhmassenverteilung beschreibt, weshalb er im weiteren Verlauf als *Formskalar* oder – im Hinblick auf einzelne freie Teilchen – auch als *Gestalts-* bzw. *Verteilungsfunktion* bezeichnet wird.

Soll nun wie üblich gelten  $P_i \equiv (W/c, -\vec{P}) \equiv -(\dot{S}/c, \vec{\nabla} S) \equiv -\partial_i S \equiv -S_{,i}$ , so sind dadurch in Verbindung mit der HAMILTON-JACOBI-Gleichung<sup>40)</sup> die elektromagnetischen Potentiale eindeutig festgelegt. Innerhalb frei fallender lokaler Inertialsysteme<sup>41)</sup> ergibt der Übergang zu den kontravarianten Komponenten mit Hilfe des Fundamentaltensors  $\eta^{ik}$  der speziellen Relativitätstheorie einfach

$$P^k \equiv -S^{,k} \Leftrightarrow (E/c, \vec{P}) \equiv (-\dot{S}/c, \vec{\nabla} S). \quad (5,15)$$

Im Hinblick auf die identische Erfüllung von (5,7) müßte nun eigentlich jede Ladungsverteilung im Gleichgewicht sein, wenn nur (5,11) erfüllt ist. Daß dies aber letztlich nicht der Fall ist, wird bei Ersetzung von  $U_i$  durch  $\tilde{A}_i$  gemäß (5,9) im Energie-Impuls-Tensor  $T_i^k$  und anschließender Probe auf (4,1) deutlich. Der Grund dafür liegt darin, daß es sich bei  $T_i^k \equiv L_i^k + K_i^k$  nicht um einen konsistenten, sondern in  $K_i^k$  lediglich phä-

<sup>40)</sup> Gemäß der HAMILTON-JACOBI-Gleichung gilt für ein geladenes Teilchen  $(W-U) = m_0 c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$ . Mit  $U = e_0 \phi = W - W_{\text{kin}}$  bedeutet dies beispielsweise die Festlegung des elektrischen Potentials.

<sup>41)</sup> Andere als *lokale* frei fallende – mit Bezug auf die Hintergrundstrahlung also im allgemeinen beschleunigte – Inertialsysteme gibt es meines Erachtens überhaupt nicht. Die übliche Definition auf Grundlage konstanter Relativgeschwindigkeiten widerspricht dieser Auffassung räumlich und zeitlich begrenzter Inertialsysteme durchaus nicht.

nomenologisch hinzugefügten Energie-Impuls-Tensor handelt. Dieser Mangel soll im nächsten Abschnitt behoben werden.

Bereits jetzt aber werden innere Grenzen der klassischen Mechanik dort erkennbar, wo sich der Impuls  $p_\alpha$  nur auf den ‚wirbelfreien‘ Anteil  $\partial_\alpha S \equiv S_\alpha$  eines entsprechenden Wirkungsintegrals bezieht<sup>42)</sup>. Für diese selbst-aufgelegte Beschränkung scheint es keinen anderen Grund zu geben als den möglicher Vereinfachung, die aber bei mikroskopischer Betrachtung eben nicht mehr durchgängig erlaubt ist. Es liegt auf der Hand, daß insbesondere zur Beschreibung von Teilchen mit Eigendrehimpulsen dieser klassische Ansatz nicht ausreicht, sondern hier jedenfalls das volle ‚Geschwindigkeitsfeld‘

$$\tilde{u}_i = -\frac{1}{m_0 c} \left( s_i + \frac{e_0}{c} a_i \right) \equiv u_i + w_i \quad (5,16)$$

benötigt wird, wobei etwa  $u_i$  der ‚wirbelfreien‘ und  $w_i$  der ‚quellenfreien‘ Bewegung entspricht (deren Symbole wie bei allen *mikroskopischen* Größen in Kleinbuchstaben geschrieben werden). Daß damit eine physikalische Bedeutung der elektromagnetischen Potentiale verbunden ist, folgt aus einer hier vorausgesetzten Lokalisierbarkeit der elektromagnetischen Energie. Nach bisheriger Vorstellung sollte diese Energie immer mit der Dichte  $\frac{1}{2}(E^2 + B^2)$  im Feld verteilt sein. Doch in der Elektrostatik läßt sich das Integral  $\frac{1}{2} \int E^2 dV$  durch partielle Integration<sup>43)</sup> in  $\frac{1}{2} \int \rho \phi dV$  umwandeln, während natürlich  $E^2 \neq \rho \phi$  bleibt! Es können aber nicht beide Dichten zugleich richtig sein. Solange nun das elektrostatische Potential  $\phi$  lediglich als mathematische Hilfsgröße ohne jede physikalische Bedeutung betrachtet wurde, glaubte man allerdings, darüber hinwegsehen zu können.

Diesen Abschnitt 5 zusammenfassend bleibt festzuhalten, daß der herkömmliche elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor unvollständig ist. Die Ergänzung durch den phänomenologischen *kinetischen* Energie-Impuls-Tensor ist annähernd richtig, solange es um die Schwerpunktsbewegung geladener Teilchen in Feldern geht, die über die charakteristischen Abmessungen der Teilchen als homogen betrachtet werden können. In allen anderen Fällen – insbesondere bei der Untersuchung von Gleichgewichtszuständen – ist ein konsistenter Energie-Impuls-Tensor heranzuziehen, der sich aus einer fundamentalen Erweiterung der MAXWELL-LORENTZ’schen Elektrodynamik ergeben soll. Wie sich sogleich zeigen wird, liegt der bereits erwähnte Schlüssel dazu in dem hier abgeleiteten physikalischen Zusammenhang (5,14), der im Rahmen der konventionellen Elektrodynamik meines Wissens bisher nicht bekannt gewesen ist und der die Viererstromdichte mit dem um die Ableitungen des Wirkungsskalars *erweiterten* Viererpotential verknüpft.

## 6. Das konsistente Variationsprinzip und die daraus fließenden Gleichungen

Das Energie-Impuls-Postulat verlangt, daß sich ein zeitweilig abgeschlossenes System als Ganzes so verhält wie ein frei fallendes Teilchen. Aus den dynamischen Paradoxa der Relativitätstheorie folgt, daß dies nur möglich ist, wenn das System durch einen konsistenten – nach Maßgabe der einbezogenen Felder vollständigen – Energie-Impuls-Tensor beschrieben wird. Dieser Tensor hat, indem er über die relativistisch nicht haltbaren Idealisierungen von Massenpunkt und starrem Körper der klassischen Mechanik hinausgeht, der Stabilität atomarer Systeme Rechnung zu tragen. Dazu bedarf es zunächst einer mit den Fundamentalbedingungen verträglichen Verallgemeinerung des von POINCARÉ eingeführten phänomenologischen Drucks, um in stationären Systemen der LORENTZ-Kraftdichte das Gleichgewicht zu halten. Die Unvollständigkeit der konventionellen Theorie verlangt deren Erweiterung. Dabei wird den elektromagnetischen Potentialen eine reale Bedeutung zukommen, die in Gleichung (5,11) bereits ihren einfachsten Ausdruck gefunden hat.

<sup>42)</sup> Die klassische Mechanik entspricht in diesem Sinne etwa der Theorie *laminarer* Strömungen. So stößt sie bezeichnenderweise bei dem Versuch einer konsequenten Einbeziehung von Eigendrehimpulsen an ihre Grenzen, wie sich anhand einiger *klassischer* Paradoxa zeigen läßt. Ein Beispiel ist die Unmöglichkeit einer schlagartig festen, absolut rutschfesten Verbindung zweier parallel orientierter starrer Scheiben unterschiedlicher Winkelgeschwindigkeit (es dürfte dabei eine ganz und gar unklassische spontane Symmetriebrechung stattfinden, die zu einem Taumeln der verbundenen Scheiben führt, damit auch in diesem Fall allen Erhaltungssätzen von Energie, Impuls und Drehimpuls gleichzeitig Genüge getan werden kann).

<sup>43)</sup> Die bei Erfüllung der Fundamentalbedingungen grundsätzlich gegebene Möglichkeit der partiellen Integration steht einer eindeutigen Lokalisierbarkeit immer entgegen.

Die Bedeutung von Variationsprinzipien liegt in der Tatsache, daß sich mit ihrer Hilfe fundamentale Naturgesetze elegant formulieren lassen. Solange dabei nicht der Aspekt einer *einheitlichen* Theorie im Vordergrund steht, kann es durchaus genügen, auch unvollständige Versionen zu diskutieren (s. a. Abschn. 3.3). Jeder Ansatz einer skalaren Wirkungsichte stellt dem Prinzip eine Frage, worauf mathematisch mögliche Gesetze als Antwort gegeben werden<sup>44)</sup>. Hier allerdings kommt es darauf an, ein vollständiges Variationsprinzip zu finden, um davon in geeigneter Weise Gebrauch zu machen. Denn ein *konsistenter* Energie-Impuls-Tensors verlangt unabdingbar die Vollständigkeit der Variation im Sinne eines totalen Differentials. *Alle* in der vierdimensionalen Wirkungsichte auftretenden Veränderlichen und Ableitungen sind der Reihe nach einzubeziehen, ohne daß zur Vermeidung unerwünschter Resultate irgendwelche Größen unverändert bleiben dürfen. Die sich aus dieser Vorgehensweise ergebenden Gesetzmäßigkeiten sind zwar nicht notwendigerweise physikalisch zutreffend, mitsamt den zugehörigen Erhaltungssätzen jedenfalls aber mathematisch konsistent. Entscheidendes Kriterium bleibt natürlich immer der Grad der Übereinstimmung mit der experimentellen Erfahrung.

*Das konsistente Variationsprinzip:* Für jedes bis auf Gravitation und Strahlung abgeschlossene System existiert zwischen zwei beliebig gewählten Zeitpunkten ein von Null verschiedenes Wirkungsintegral  $S \equiv \int \Phi d\Omega$ , dessen *vollständige* Variation verschwindet. Dabei ist das Integral invariant gegenüber allgemeinen Koordinatentransformationen und unabhängig von allen inneren Abläufen sowie dem Bewegungszustand des frei fallenden Systems als Ganzem.

Nach üblicher Auffassung verhält es sich dabei so, daß im Sinne des NOETHER-Theorems aus den Symmetrien und Invarianzeigenschaften eines Variationsprinzips entsprechende Erhaltungssätze resultieren, doch läßt sich dieser Zusammenhang gerade auch umgekehrt betrachten. Das sei hier am Beispiel der elektromagnetischen Potentiale erläutert: Angenommen es existiert überhaupt einmal ein Vektorfeld  $A_k$ , das zunächst ganz unvorhersehbare Änderungen  $A_{ik} \equiv \partial_i A_k$  erfahren möge. Diese beliebigen Änderungen setzen sich jederzeit aus zwei Anteilen, einem symmetrischen ( $A_{ik} + A_{ki}$ ) und einem antisymmetrischen ( $A_{ik} - A_{ki}$ ), zusammen. Für die aus dem antisymmetrischen Anteil entstehende Größe  $B^i \equiv \partial_k (A^{ik} - A^{ki}) \neq 0$  aber ist eine Kontinuitätsgleichung  $\partial_i B^i \equiv 0$  identisch erfüllt, ohne daß eine diesbezügliche Bedingung zusätzlich erforderlich wäre. Die einmal vorhandene Quantität  $B^i$  bleibt also erhalten (was in diesem Fall die wohlbekannte ‚Eich-Symmetrie‘ der elektromagnetischen Potentiale mit sich bringt). Für eine aus dem symmetrischen Anteil von  $A_{ik}$  analog abgeleitete zufällig vorhandene Größe  $C^i \equiv \partial_k (A^{ik} + A^{ki}) \neq 0$  gilt das nicht. Nach meinem Verständnis dürfte *dies* der eigentliche Grund dafür sein, daß im Variationsprinzip bekanntlich nur der antisymmetrische Feldtensor ( $A_{ik} - A_{ki}$ ) auftritt. Falls sich aber eines Tages zeigen sollte, daß der symmetrische Anteil – allerdings in seiner kovarianten Form ( $A_{k;i} + A_{i;k}$ ) – doch noch irgendwo versteckt ist, so wäre das meines Erachtens nur unter der Voraussetzung möglich, daß dem zusätzliche Erhaltungssätze bzw. Symmetrien entsprechen.

Wird in der Variationsgleichung  $\delta \int \Phi d\Omega = 0$  die räumliche Integration vorab durchgeführt, so ergibt sich ein Ausdruck der Art  $\delta \int K ds = 0$ , was mit dem EINSTEIN’schen Wirkungsprinzip für frei fallende Teilchen genau übereinstimmt, wenn die Konstante  $K$  mit der negativen Ruhemasse des Gesamtsystems gleichgesetzt wird. Daraus folgt, daß eine endgültige Wirkungsichte  $\Phi$  letztlich mit der Ruhmassendichte  $\mu_{\text{System}}$  übereinstimmen sollte, wobei die Ruhemasse  $M_{\text{System}}$  des Gesamtsystems von der Summe der darin enthaltenen Teilchenmassen  $\sum m_K$  um einen der Bindungsenergie entsprechenden Betrag abweicht. Auf die Frage, inwieweit dies bereits im vorliegenden Fall gelingen könnte, werde ich in Abschnitt 10.2 kurz zu sprechen kommen.

## 6.1 Die Zusammenstellung einer einfachsten Wirkungsichte im Detail

Nach den vorausgegangenen grundsätzlichen Erwägungen sei nun die einfachste Wirkungsichte  $\Phi$  im Detail zusammengestellt, aus deren Variation die fundamentalen Gleichungen der Elektrodynamik, Relativitätstheorie und Quantenmechanik hervorgehen, und zwar mitsamt zugehörigen Erhaltungssätzen bis hin zu dem von den dynamischen Paradoxa geforderten konsistenten Energie-Impuls-Tensor.

<sup>44)</sup> Ich denke, daß das Variationsprinzip angesichts dieser Wirkungsweise ebenso gut als das *Orakel der Physik* bezeichnet werden könnte.

Es stehe der Index  $K$  für ein speziell herausgegriffenes Teilchen, die Bezeichnung  $\bar{K}$  aber für ‚Nicht- $K$ ‘. Die Stellung oben oder unten aller nicht-kursiv geschriebenen Summations- oder Teilchenindizes wie  $K$  bzw.  $\bar{K}$  ist jeweils ohne Bedeutung. Dann nimmt das in Abschnitt 1 vorläufig formulierte Variationsprinzip (1,1-2) mit

$$\delta \int \left( \tilde{\Phi} + \sum_K \hat{\Phi}_K \right) d\Omega = 0 \quad (6,1)$$

seine relevante Gestalt an, wobei sich für den materiellen Anteil der Wirkungsichte *des Teilchens  $K$*  die explizite Darstellung

$$\hat{\Phi}_K \equiv \frac{1}{4} \mathbf{h}_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}} - \frac{1}{2m_K} q_K^2 \left( \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_K^l \right) \left( s_l^K + \frac{e_K}{c} a_l^K \right) + \frac{1}{2} \mathbf{m}_K c^2 q_K^2 - \frac{\hbar^2}{2m_K} \mathbf{q}_K^l q_l^K \quad (6,2)$$

ergibt. Der Summenansatz in (6,1) trägt zusammen mit (6,2) nun der fundamentalen Tatsache Rechnung, daß die Materie aus elementaren Teilchen aufgebaut ist. Demgegenüber stehe der andere oben auftretende Anteil  $\tilde{\Phi}$  zunächst für die EINSTEIN'sche Wirkungsichte eines *einzigsten* gemeinsamen Gravitationsfeldes

$$2\kappa \tilde{\Phi} := \mathbf{G} \equiv \sqrt{g} g^{um} g^{sv} g^{rw} \left[ \Gamma_{v,ur} \Gamma_{w,ms} - \Gamma_{v,um} \Gamma_{w,sr} \right], \quad (6,3)$$

die hier als Kombination des kontravarianten Fundamentaltensors  $g^{ik}$  mit den gewöhnlichen Ableitungen der *ko-varianten* Komponenten  $g_{lik} \equiv \partial_l g_{ik}$  erscheint, wobei letztere in den CHRISTOFFEL-Symbolen erster Art gemäß  $\Gamma_{l,ik} \equiv \frac{1}{2}(g_{kli} + g_{ilk} - g_{lik})$  enthalten sind. Auf diese eigenartige Zusammensetzung wird in 6.4 näher eingegangen. Die ursprünglich in Abschnitt 1 aufgetretene Dichte  $\mathbf{R}$  läßt sich durch partielle Integration in das hier benutzte einfachere  $\mathbf{G}$  überführen, ohne die daraus abzuleitenden Gravitationsgleichungen zu beeinträchtigen (s. a. [36]).

Wie dort bereits angekündigt, liegt eine Besonderheit gegenüber der konventionellen Elektrodynamik darin, daß hier bezüglich des Teilchens  $K$  die Wirkungsichte  $\frac{1}{4} \mathbf{h}_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}}$  des elektromagnetischen Feldes zu bilden ist aus der Tensordichte des mikroskopischen elektromagnetischen Quellenfeldes dieses Teilchens  $\mathbf{h}_K^{lm} \equiv \mathbf{f}_K^{lm} + \mathbf{p}_K^{lm}$  mit dem Feld  $f_{kl}^{\bar{K}} \equiv \tilde{a}_{kl}^{\bar{K}} - \tilde{a}_{lk}^{\bar{K}}$  aller anderen Teilchen  $\bar{K}$ , wobei die Abkürzung  $\tilde{a}_{kl}^{\bar{K}} \equiv \partial_k \tilde{a}_l^{\bar{K}}$  für die gewöhnlichen partiellen Ableitungen der mikroskopischen *erweiterten* elektromagnetischen Potentiale  $\tilde{a}_l^{\bar{K}}$  verwendet ist.  $\mathbf{f}_K^{lm} \equiv \sqrt{g} g^{lr} g^{ms} f_{rs}^K$  ist die mikroskopische elektromagnetische Feldtensordichte,  $\mathbf{p}_K^{lm}$  die Tensordichte der mikroskopischen elektromagnetischen Polarisation. Es wird sich herausstellen, daß gerade die rein wechselseitige Kombination zur Gewinnung eines konsistenten Energie-Impuls-Tensors notwendig ist, der in frei fallenden Inertialsystemen die Erhaltungsgleichungen (4,1) erfüllt (s. Abschn. 6.5). Daß der dazu erforderliche Ansatz zugleich auch eine Vermeidung physikalisch relevanter Singularitäten sowie aller Selbstenergieprobleme mit sich bringt, ist eine bemerkenswerte Konsequenz. Die übrigen Spezifikationen gegenüber der in der Einleitung gewählten vorläufigen Form (1,2) werden nun der Reihe nach angegeben. Eine systematische Zusammenstellung aller verwendeten Symbole findet sich in Abschnitt 2 ‚Bezeichnungen und Schreibweisen‘.

Die elektrische Viererstromdichte  $\tilde{\mathbf{j}}_K^l$  des Teilchens  $K$  wird im nächsten Abschnitt mitsamt den MAXWELL'schen Gleichungen in quantisierter Form abgeleitet. Grundlage dafür ist die mikroskopische Übertragung der oben abgeleiteten Schlüsselbeziehung (5,14), die im detaillierten Variationsprinzip (6,1-3) ihren Ausdruck gefunden hat mit

$$\mathbf{J}^l \hat{=} - \sum_K \frac{e_K}{m_K c} q_K^2 \left( \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_K^l \right). \quad (6,4)$$

In entsprechender Übertragung erscheint die Beziehung (5,12) in der Form

$$\tilde{A}_l \hat{=} \sum_K \left( a_l^{\bar{K}} + \frac{c}{e_K} s_l^K \right) \quad (6,5)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha) \quad a_l^{\bar{K}} &\equiv \sum_{N \neq K} a_l^N, \\ \beta) \quad f_{lm}^{\bar{K}} &\equiv \sum_{N \neq K} f_{lm}^N. \end{aligned} \quad (6,6)$$

Für die elektromagnetische Feldstärke eines beliebigen Teilchens ‚N‘ gilt dabei im Einklang mit (5,6), (5,12) die kovariante Definition

$$f_{lm}^N \equiv a_{m;l}^N - a_{l;m}^N, \quad (6,7)$$

die sich bekanntlich auch einfach schreiben läßt als  $f_{lm}^N \equiv a_{lm}^N - a_{ml}^N \equiv \partial_l a_m^N - \partial_m a_l^N$ . Entsprechend der in (5,8) enthaltenen makroskopischen Substitution  $\mu_0 \equiv m_0 Q^2$  ist für die Ruhmassendichte als drittem Bestandteil der Wirkungsichte (6,2) im Detail angesetzt

$$\mu_0 \equiv \sum_K \mu_0^K \equiv \sum_K \sqrt{g} m_K q_K^2 \equiv \sum_K \mathbf{m}_K q_K^2. \quad (6,8)$$

Hier ist  $\mathbf{m}_K \equiv \sqrt{g} m_K$ , wo  $m_K$  für die Ruhmasse und  $g$  für die negative Determinante des Fundamentaltensors  $g_{ik}$  stehen (auch andere fettgedruckte Symbole beinhalten in der Regel  $\sqrt{g}$  als jeweils *nachträglich vorangestellten* Faktor). Es sei sogleich auch darauf hingewiesen, daß es sich unter dem Summenzeichen von (6,8) um die Dichten der *gebundenen* Ruhmassen handelt, die gegenüber den freien Ruhmassen einen der jeweiligen Bindungsenergie entsprechenden Massendefekt aufweisen (s. Abschn. 6.3.c).

Daneben ist auch der Übergang von einem geglätteten Skalar  $Q$  zu den einzelnen mikroskopischen Funktionen  $q_K$  erfolgt. Die Größe  $q_K$  wird sich schließlich als der *reelle* quantenmechanische Formskalar erweisen,  $q_l^K \equiv \partial_l q^K \equiv \partial q^K / \partial x^l$  sind seine Ableitungen nach den Koordinaten  $x^l$ .

Allein schon das Auftreten dieser im Sinne des Abschnitts 5.3 unvermeidlichen Skalarfunktion  $q_K$  in  $\mathbf{J}^l$  oder  $\mu_0$  – die gemäß (6,8) die Verteilung der Ruhmasse bzw. Ladung eines Teilchens bestimmen sollte – weist im Sinne einer vollständigen Variation unübersehbar auf die Notwendigkeit hin, als neuen Summanden eine aus dessen Ableitungen  $q_l^K$  gebildete skalare Dichte in (6,2) einzuschließen. Das wird im Ergebnis zu einer Gleichung führen, welche die veränderliche Ladungs- bzw. Ruhmassenverteilung des jeweiligen Teilchens in unterschiedlichen Situationen beschreibt.

Würde aber der letzte Summand in (6,2) fehlen, so bliebe zwar immer noch ein Variationsprinzip für geladene Teilchen *beliebiger* Gestalt, die sich formal – wie am Ende des Abschnitts 6.3.a explizit ersichtlich – gemäß der ‚klassischen‘ HAMILTON-JACOBI-Gleichung zu bewegen hätten. Doch ließe sich aus einem solchermaßen verkürzten Variationsprinzip – anders als auf Grundlage des vollständigen Ausdrucks (6,2) – kein *eindeutiger* konsistenter Energie-Impuls-Tensor ableiten. Im Vergleich mit (1,2) ist deshalb die Konstante  $C$  hier nicht etwa gleich Null, sondern der Einfachheit halber sofort als  $C \equiv -\frac{1}{2} \hbar^2 / m_K$  eingesetzt, wobei  $\hbar$  zunächst eine grundsätzlich aus der Beobachtung zu bestimmende – obwohl tatsächlich längst bekannte – Naturkonstante bedeutet. Auf die naheliegende Frage, warum diese nicht mit dem dimensionsgleichen Ausdruck  $e^2/c$  identisch sei oder in einem nachvollziehbaren Verhältnis stehe, soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

Die Wirkungsichte  $\Phi$  zeigt damit insgesamt eine funktionale Abhängigkeit von den mikroskopischen skalaren Größen  $s, q$ , von dem Viererpotential  $a_l$  und von dem kontravarianten Fundamentaltensor  $g^{ik}$ . Die daraus fließenden Gleichungen können deshalb als die einer Skalar-Vektor-Tensor-Theorie betrachtet werden. – Im Interesse größtmöglicher Einfachheit gelte nun zunächst

$$\mathbf{h}_K^{lm} := \mathbf{f}_K^{lm}, \quad (6,9)$$

d.h.  $\mathbf{p}_K^{lm} = 0$ . Auf entsprechende *elementare* Polarisierungseffekte soll erst im Anhang A bei der Erweiterung des Variationsprinzips zur Erfassung der DIRAC-Gleichung eingegangen werden. Zur Verdeutlichung der im folgenden zu behandelnden Wirkungsichte seien die ersten Glieder der in (6,1-3) enthaltenen Summe  $\Phi \equiv \Sigma \Phi_K$  für  $K = A, B, C, D \dots$  schließlich explizit ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
& \hat{\Phi}_{ABC\dots}(s_l, q, q_l, a_m, a_{lm}, g^{lm}) \\
& \equiv \\
& \frac{1}{4} \mathbf{f}_A^{kl} f_{kl}^{BCD\dots} - \frac{1}{2m_A} q_A^2 \left( \frac{e_A}{c} \mathbf{a}_{BCD\dots}^l + \mathbf{s}_A^l \right) \left( \frac{e_A}{c} a_l^{BCD\dots} + s_l^A \right) + \frac{1}{2} \mathbf{m}_A c^2 q_A^2 - \frac{\hbar^2}{2m_A} \mathbf{q}_A^l q_l^A \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{f}_B^{kl} f_{kl}^{ACD\dots} - \frac{1}{2m_B} q_B^2 \left( \frac{e_B}{c} \mathbf{a}_{ACD\dots}^l + \mathbf{s}_B^l \right) \left( \frac{e_B}{c} a_l^{ACD\dots} + s_l^B \right) + \frac{1}{2} \mathbf{m}_B c^2 q_B^2 - \frac{\hbar^2}{2m_B} \mathbf{q}_B^l q_l^B \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{f}_C^{kl} f_{kl}^{ABD\dots} - \frac{1}{2m_C} q_C^2 \left( \frac{e_C}{c} \mathbf{a}_{ABD\dots}^l + \mathbf{s}_C^l \right) \left( \frac{e_C}{c} a_l^{ABD\dots} + s_l^C \right) + \frac{1}{2} \mathbf{m}_C c^2 q_C^2 - \frac{\hbar^2}{2m_C} \mathbf{q}_C^l q_l^C \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{6,10}$$

In dieser Darstellung wird besonders klar erkennbar, wie die Felder verschiedener Teilchen so zusammenspielen, daß Selbstwechselwirkungen von vornherein ausgeschlossen sind. Vor allem aber kommt in dem hier augenfällig zutage tretenden Quantenansatz auch die von den dynamischen Paradoxa geforderte Zuordnung kontinuierlicher Felder zu den einzelnen Teilchen deutlich zum Ausdruck.

## 6.2 Die MAXWELL'schen Gleichungen der ladungsbezogenen Einzelfelder

Die Definition der elektromagnetischen Feldstärke gemäß (6,7) beinhaltet bekanntlich die identische Erfüllung des homogenen Anteils der MAXWELL'schen Gleichungen

$$f_{ik;l}^N + f_{kl;i}^N + f_{li;k}^N \equiv 0 \tag{6,11}$$

für das Feld jedes einzelnen Teilchens (Index „N“), und zwar in kovarianter Form. Aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors läßt sich dies auch vereinfacht schreiben als  $\partial_l f_{ik}^N + \partial_i f_{kl}^N + \partial_k f_{li}^N \equiv 0$ . Zur Ableitung der verbleibenden inhomogenen MAXWELL'schen Gleichungen – hier von vornherein in quantisierter Form – werden analog zur üblichen Vorgehensweise zunächst die einzelnen Potentiale  $a_l$  und die daraus gebildeten Felder  $f_{lm} \equiv a_{lm} - a_{ml}$  variiert. Dabei lassen sich die  $g_{ik}$ , wie auch in den entsprechenden Fällen der späteren Abschnitte 6.3 und 6.5, *vorübergehend* als Konstante behandeln. Der Grund dafür ist, daß in 6.4 der Fundamentaltensor mitsamt den daraus abgeleiteten Größen einer eigenen Variation unterzogen wird. Das gesamte Verfahren wird weiter unten als konsistent verifiziert, indem gezeigt wird, daß es zu einem den Erhaltungssätzen (4,1) genügenden Energie-Impuls-Tensor führt. Genau darauf kommt es ja überhaupt an, wie die oben besprochenen Beispiele der dynamischen Paradoxa gezeigt haben.

Da bei Variation der *gesamten* Wirkungsdichte  $\Phi$  die elektromagnetischen Felder und Potentiale in unterschiedlichen Kombinationen auftreten, bietet es sich an, auf die explizite Darstellung (6,10) zurückzugreifen, wobei hier nur die ersten beiden der zugehörigen EULER-LAGRANGESchen Gleichungen ausgeschrieben werden. Diese sind

$$\begin{aligned}
\partial_k \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_{kl}^A} \right) &= \frac{\partial \hat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_l^A}, \\
\partial_k \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_{kl}^B} \right) &= \frac{\partial \hat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_l^B}, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{6,12}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_l^A} &= -\frac{1}{m_B} q_B^2 \left[ \frac{e_B^2}{c^2} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_C^l + \dots) + \frac{e_B}{c} \mathbf{s}_B^l \right] - \frac{1}{m_C} q_C^2 \left[ \frac{e_C^2}{c^2} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_B^l + \dots) + \frac{e_C}{c} \mathbf{s}_C^l \right] + \dots, \\
\frac{\partial \hat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_l^B} &= -\frac{1}{m_A} q_A^2 \left[ \frac{e_A^2}{c^2} (\mathbf{a}_B^l + \mathbf{a}_C^l + \dots) + \frac{e_A}{c} \mathbf{s}_A^l \right] - \frac{1}{m_C} q_C^2 \left[ \frac{e_C^2}{c^2} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_B^l + \dots) + \frac{e_C}{c} \mathbf{s}_C^l \right] + \dots, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{6,13}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_k \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_{kl}^A} \right) &= \partial_k \left[ \mathbf{f}_B^{kl} + \mathbf{f}_C^{kl} + \dots \right], \\ \partial_k \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_{kl}^B} \right) &= \partial_k \left[ \mathbf{f}_A^{kl} + \mathbf{f}_C^{kl} + \dots \right],\end{aligned}\tag{6,14}$$

folgt

$$\begin{aligned}\partial_k \left[ \mathbf{f}_B^{kl} + \mathbf{f}_C^{kl} + \dots \right] &= -\frac{e_B}{m_B c} q_B^2 \left[ \mathbf{s}_B^l + \frac{e_B}{c} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_C^l + \dots) \right] - \frac{e_C}{m_C c} q_C^2 \left[ \mathbf{s}_C^l + \frac{e_C}{c} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_B^l + \dots) \right] + \dots, \\ \partial_k \left[ \mathbf{f}_A^{kl} + \mathbf{f}_C^{kl} + \dots \right] &= -\frac{e_A}{m_A c} q_A^2 \left[ \mathbf{s}_A^l + \frac{e_A}{c} (\mathbf{a}_B^l + \mathbf{a}_C^l + \dots) \right] - \frac{e_C}{m_C c} q_C^2 \left[ \mathbf{s}_C^l + \frac{e_C}{c} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_B^l + \dots) \right] + \dots,\end{aligned}\tag{6,15}$$

Bei der Berechnung von (6,14) ist zu beachten, daß in der Wirkungsichte  $\hat{\Phi}_{ABC\dots}$  jedes Produkt zweier Feldstärken doppelt auftritt. Dies läßt sich am einfachsten aus folgender Darstellung

$$\frac{1}{4} \left[ \mathbf{f}_A^{kl} (f_{kl}^B + f_{kl}^C + \dots) + \mathbf{f}_B^{kl} (f_{kl}^A + f_{kl}^C + \dots) + \mathbf{f}_C^{kl} (f_{kl}^A + f_{kl}^B + \dots) + \dots \right]\tag{6,16}$$

ersehen, aus der mit

$$\mathbf{f}_A^{kl} f_{kl}^B \equiv \sqrt{g} g^{rk} g^{sl} f_{rs}^A f_{kl}^B \equiv \mathbf{f}_B^{kl} f_{kl}^A\tag{6,17}$$

der äquivalente Ausdruck

$$\frac{1}{2} \left[ \mathbf{f}_A^{kl} f_{kl}^B + \mathbf{f}_A^{kl} f_{kl}^C + \mathbf{f}_B^{kl} f_{kl}^C + \dots \right]\tag{6,18}$$

resultiert. Als Ergebnis in Bezug auf das einzelne herausgegriffene Teilchen K folgt deshalb aus (6,15) schließlich einfach

$$\partial_k \mathbf{f}_K^{kl} = -\frac{e_K}{m_K c} q_K^2 \left( \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_K^l \right) \equiv \tilde{\mathbf{j}}_K^l.\tag{6,19}$$

Dies sind die inhomogenen MAXWELL'schen Gleichungen in quantisierter Form. Sie gelten wie (6,11) in einem beliebigen durch den makroskopischen Fundamentaltensor  $g_{ik}$  beschriebenen Gravitationsfeld. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß in die Viererstromdichte (6,19) eines Teilchens K nicht dessen eigenes Viererpotential eingeht, sondern die durch den Index  $\bar{K}$  bezeichnete Summe der Viererpotentiale aller anderen Teilchen

Damit ist auch die Berechtigung der oben vorgenommenen Substitution (6,5) erwiesen, die ihrerseits dem in Abschnitt 5.3 aufgedeckten einfachsten Zusammenhang zwischen Viererpotential und Viererstromdichte Rechnung trägt. Für das weitere sei als bequeme Abkürzung noch eingeführt

$$\tilde{\mathbf{s}}_K^l \equiv \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_{\bar{K}}^l,\tag{6,20}$$

außerdem seien zur Verdeutlichung der verschiedenen Aspekte der Viererstromdichte des einzelnen herausgegriffenen Teilchens K die folgenden identischen Umformungen angegeben:

$$\tilde{\mathbf{j}}_K^l \equiv -\frac{e_K}{m_K c} q_K^2 \tilde{\mathbf{s}}_K^l \equiv -e_K q_K^2 \left( \frac{1}{m_K c} \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{m_K c^2} \mathbf{a}_{\bar{K}}^l \right) \equiv e_K q_K^2 (\mathbf{u}_K^l + \mathbf{w}_{\bar{K}}^l) \equiv \rho_K \tilde{u}_K^l \equiv (\tilde{\rho}_K, \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{j}}_K^l).\tag{6,21}$$

Diese sind zugleich als implizite Definitionen anzusehen. Für die Viererstromdichte jedes einzelnen Teilchens ist dabei infolge der MAXWELL'schen Gleichungen (6,19) eine Kontinuitätsgleichung  $\partial_i \tilde{\mathbf{j}}_K^i = 0$  identisch erfüllt.

### 6.3 Die Gleichungen der Quantenmechanik bei Vernachlässigung von Spineffekten

Die seinerzeit von mehreren Autoren gefundene relativistische Wellengleichung, die heute allgemein als KLEIN-GORDON-Gleichung bezeichnet wird<sup>45)</sup>, ist von fundamentaler Bedeutung für die Quantenmechanik, indem sie einerseits die begriffsbildende und bahnbrechende nicht-relativistische SCHRÖDINGER-Gleichung – aus der sie beinahe zwangsläufig durch Verallgemeinerung entstanden ist – als Näherung enthält, andererseits aber nach ausdrücklicher Voraussetzung auch für jede Spinor-Komponente der DIRAC-Gleichung im Falle freier Teilchen strenge Gültigkeit beansprucht.

Es stellt mathematisch keine Überraschung dar, daß sich die *komplexe* KLEIN-GORDON-Gleichung aufgrund ihrer Linearität – die allerdings nur mit gewissen Einschränkungen besteht, wie Abschnitt 7.6 zeigen wird – sehr einfach in ein äquivalentes Gleichungspaar für zwei reelle Größen zerlegen läßt, die den wohlbekannten komplexen Skalar  $\psi$  umkehrbar eindeutig determinieren. Entsprechende physikalische Konsequenzen aber haben sich bisher in Analogien zur klassischen Mechanik erschöpft. Ich werde hier gerade umgekehrt vorgehen und die KLEIN-GORDON-Gleichung umkehrbar eindeutig in komplexer Form zusammensetzen. Grundlage dafür sind die aus der Variation nach der Gestaltfunktion  $q_K$  und dem mikroskopischen Wirkungsskalars  $s_K$  aus (6,1-2) resultierenden reellen Gleichungen.

#### 6.3.a Die kovariante Wellengleichung der reellen Gestaltfunktion $q_K$

Was folgt nun zunächst aus der Variation der Gestaltfunktion  $q_K$  für den Fall eines speziell herausgegriffenes Teilchens K? Die EULER'schen Gleichungen lauten hier

$$\partial_l \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial q_l^K} \right) = \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial q^K}. \quad (6,22)$$

Aus dem entsprechenden Anteil  $\bar{\Phi}_K$  der Wirkungsichte (6,2) fließt mit

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial q^K} = -\mathbf{q}_K \left( \frac{1}{m_K} \tilde{s}_K^l \tilde{s}_l^K - m_K c^2 \right) \quad (6,23)$$

und

$$\partial_l \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial q_l^K} \right) = -\frac{\hbar^2}{m_K} \partial_l \mathbf{q}_K^l \quad (6,24)$$

als zugehörige Differentialgleichung zunächst

$$\frac{\hbar^2}{m_K} \partial_l \mathbf{q}_K^l = \mathbf{q}_K \left( \frac{1}{m_K} \tilde{s}_K^l \tilde{s}_l^K - m_K c^2 \right), \quad (6,25)$$

die sich wegen

$$\mathbf{q}_K^l \equiv \sqrt{g} \partial^l q_K \equiv \sqrt{g} g^{lr} \partial_r q_K \equiv \sqrt{g} q_{K;l}^l. \quad (6,26)$$

wiederum im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie kovariant schreiben läßt, und zwar als

$$\hbar^2 q_{K;l}^l = q_K \left[ \left( s_K^l + \frac{e_K}{c} a_l^K \right) \left( s_l^K + \frac{e_K}{c} a_l^K \right) - m_K^2 c^2 \right]. \quad (6,27)$$

<sup>45)</sup> Es ist in diesem Zusammenhang bemerkenswert, daß SCHRÖDINGER diese relativistische Gleichung nicht nur bereits aufgestellt, sondern für das H-Atom auch gelöst hatte, noch *bevor* er – offenbar wegen fehlender Übereinstimmung mit der SOMMERFELD'schen Feinstrukturformel – zunächst seine nicht-relativistische Theorie veröffentlichte (s. [29]). Die relativistische SCHRÖDINGER-Gleichung selbst erscheint dann in seiner Vierten Mitteilung [33].

Daß es sich hier bezüglich frei fallender lokaler Inertialsysteme um eine in  $q_K$  lineare, inhomogene Wellengleichung handelt, ist sehr einfach daraus ersichtlich, daß die kovarianten Ableitungen unter dieser Voraussetzung einfach in die gewöhnlichen übergehen.

Die so erhaltene reelle Wellengleichung impliziert für  $q_K \neq 0$  bei Verwendung der in (6,21) definierten Abkürzung  $\tilde{u}_K^l$  die Beziehung

$$\tilde{u}_l^K \tilde{u}_K^l = 1 + \frac{\hbar^2}{m_K^2 c^2} \frac{q_{K;l}^l}{q_K}, \quad (6,28)$$

was deutlich erkennen läßt, daß die mikroskopische Größe  $\tilde{u}_K^l$  zwar in Analogie zur makroskopischen Vierergeschwindigkeit  $U^l$  benannt wurde, nicht aber im herkömmlichen Sinne etwa unmittelbar als Teilchengeschwindigkeit verstanden werden darf. Denn im Unterschied zu (6,28) gilt für  $U^l$  die Beziehung  $U_l U^l = 1$  (s. Abschn. 5.3), dagegen gilt  $\tilde{u}_i \tilde{u}^i \rightarrow 1$  nur im formalen Grenzübergang  $\hbar \rightarrow 0$ .

Bei einem exakt diesem Grenzübergang entsprechenden Weglassen des letzten Summanden in (6,2) hätte die Variation nach  $q_K$  als linke Seite von (6,27) aber Null ergeben und damit formal – wie in Abschnitt 6.1 bereits angekündigt – unabhängig von der jeweiligen Gestaltsfunktion  $q_K$  tatsächlich die HAMILTON-JACOBI-Gleichung für Teilchen im elektromagnetischen Feld. Bemerkenswerterweise wären davon sowohl die im nächsten Abschnitt abzuleitende Kontinuitätsgleichung als auch die zuvor abgeleiteten MAXWELL'schen Gleichungen unberührt geblieben, was auf eine makroskopisch widerspruchsfreie Näherung schließen läßt.

### 6.3.b Die Kontinuitätsgleichung für Ruhemasse und Ladung

In Bezug auf die Variation des mikroskopischen Wirkungsskalars  $s$  findet sich die zugehörige Gleichung für das herausgegriffene Teilchen K ganz analog zu (6,22), und zwar hier in der Form

$$\partial_l \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial s_l^K} \right) = \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial s^K}. \quad (6,29)$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial s^K} = 0 \quad (6,30)$$

und

$$\partial_l \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial s_l^K} \right) = -\frac{1}{m_K} \partial_l \left[ q_K^2 \left( \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_K^l \right) \right]. \quad (6,31)$$

Damit ergibt sich

$$-\frac{1}{m_K} \partial_l \left[ q_K^2 \left( \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_K^l \right) \right] \equiv \frac{c}{e_K} \partial_l \tilde{\mathbf{j}}_K^l = 0 \quad (6,32)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \tilde{j}_{K;l}^l &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_l \tilde{\mathbf{j}}_K^l = 0, \\ \beta) \quad \tilde{\pi}_{K;l}^l &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_l \tilde{\pi}_K^l = 0, \end{aligned} \quad (6,33)$$

wobei sich die zweite dieser Gleichungen auf die Erhaltung der Ruhemasse – gegebenenfalls auch neutraler Teilchen – bezieht (s. u. 6,35-36). Ansonsten aber könnte es bei diesem Ergebnis so aussehen, als ob es sich um eine überflüssige Dublette zu der am Ende von Abschnitt 6.2 angegebenen Kontinuitätsgleichung handelt. Doch das doppelte Auftreten der Kontinuitätsgleichung (6,33 $\alpha$ ) – hier durch Variation des mikroskopischen Wirkungsskalars  $s_K$  – ist von großer Bedeutung.

Denn zum einen sind physikalische Erweiterungen des vorliegenden Ansatzes denkbar, in denen zwischen Ladungsdichte  $\tilde{\rho}_K$  und Ruhmassendichte  $\tilde{\mu}_K$  nicht die in (5,8) vorausgesetzte einfache Proportionalität besteht, sodaß zwei verschiedene Kontinuitätsgleichungen erforderlich werden. Zum anderen aber – und das ist entscheidend – ergäbe sich die Viererstromdichte eines Teilchens K mitsamt Kontinuitätsgleichung aus den MAXWELL-

schen Gleichungen nur dann, wenn dessen Feld jeweils bereits im voraus bekannt wäre. Genau das aber ist in der Regel *nicht* der Fall. Es verhält sich eher umgekehrt: die MAXWELL'schen Gleichungen (6,19) beinhalten die wunderbare Möglichkeit, aus jeder gemeinsamen Lösung von (6,27) und (6,33  $\alpha$ ) die zugehörige Feldstärke des betreffenden Teilchens *nachträglich* zu rekonstruieren. So wird am Beispiel des H-Atoms in Abschnitt 7.6 deutlich werden, wie sich allein aus der Vorgabe des Protonenfeldes konsistente Lösungen einschließlich des jeweiligen zuvor unbekannten Elektronenfeldes finden lassen.

Aus der Existenz des elementaren Ladungsquantums  $e$  folgt nun in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung (6,33  $\alpha$ ) die Normierungsbedingung

$$\int \tilde{\rho}_K dV \equiv \int \rho_K \tilde{u}_K^0 dV \stackrel{!}{=} e_K \equiv \pm e, \quad (6,34)$$

die sich mit (6,20), (6,21) bzw. (6,33  $\beta$ ) auch schreiben läßt als

$$\int \tilde{\mu}_K dV \equiv -\frac{1}{c} \int q_K^2 \tilde{s}_K^0 dV \equiv -\frac{1}{c^2} \int q_K^2 (\dot{\mathbf{s}}_K + e_K \mathbf{a}_K^0) dV \stackrel{!}{=} m_K, \quad (6,35)$$

wobei es sich anders als bei der im nächsten Abschnitt auftretenden gebundenen Ruhemasse hier um den entsprechenden Wert eines *freien* Teilchens K handelt. In (6,35) kommt noch einmal deutlich zum Ausdruck, daß sich die Kontinuitätsgleichung (6,33) nicht nur in Bezug auf  $\tilde{\mathbf{j}}_K^l$  sondern ebenso gut in Bezug auf die Ruhmassenstromdichte

$$\tilde{\pi}_K^l \equiv -\frac{1}{c} q_K^2 \tilde{s}_K^l \equiv \left( \tilde{\mu}_K, \frac{1}{c} \tilde{\pi}_K \right) \quad (6,36)$$

anwenden läßt. Aus den beiden äquivalenten Ausdrücken (6,34) und (6,35) ist dementsprechend ersichtlich, daß es sich bei (6,33) infolge des hier gewählten einfachsten Ansatzes (5,8) um eine Kontinuitätsgleichung sowohl für die Ladungs- als auch für die Ruhmassendichte handelt, was umgekehrt bei komplizierteren Ansätzen als (5,5), (5,8) nicht notwendigerweise zutreffen müßte. In einem solchen Fall sollte aus einem erweiterten Variationsprinzip – durch Implementierung entsprechender Symmetriebeziehungen im Sinne des NOETHER-Theorems – eine *eigene* Kontinuitätsgleichung für die Ruhmassendichte folgen. Eine derartige Unterscheidung scheint bei der im Anhang A skizzierten Behandlung der DIRAC-Gleichung möglich.

Die oben geforderte Normierung (6,34) spiegelt einfach die Erfahrungstatsache quantisiert auftretender Ladungen  $e_K$  wider. Und nur mit dieser Normierung ist es möglich, die fundamentale Energie-Frequenz-Beziehung für geladene Teilchen im elektrischen Feld abzuleiten (s. Abschnitt 7.3).

Es sei hier zusätzlich angemerkt, daß weder aus der Normierungsbedingung noch aus dem konsistenten Variationsprinzip selbst notwendigerweise auf eine durchgängige Lokalisierbarkeit einzelner geladener Teilchen geschlossen zu werden braucht, was mit einer Ununterscheidbarkeit gleichartiger Teilchen in bestimmten physikalischen Situationen verträglich ist.

### 6.3.c Die komplexe Zusammenfassung zur KLEIN-GORDON-Gleichung

Daß die paarweise Gültigkeit der reellen Wellengleichung (6,27) und der Kontinuitätsgleichung (6,33) tatsächlich ein Äquivalent zur KLEIN-GORDON-Gleichung [30] in ihrer komplexen Form darstellt, ergibt sich mit den Substitutionen

$$q_K \equiv \sqrt{\psi_K \psi_K^*} \quad (6,37)$$

und

$$s_K \equiv -\frac{i\hbar}{2} \ln(\psi_K / \psi_K^*), \quad (6,38)$$

deren Umkehrung sich zusammenfassend auch schreiben läßt als

$$\psi_K \equiv q_K e^{is_K/\hbar}. \quad (6,39)$$

Substitutionen dieser Art werden in der Literatur seit langem dazu verwendet, quasi-klassische Näherungen aufzuzeigen. Doch dabei ist es bisher unterblieben, einen solchen Ansatz konsequent durchzuführen, was im Vergleich zu dem hier beschrittenen Weg als eine umgekehrte Entwicklung prinzipiell möglich gewesen wäre.

Die reelle Wellengleichung (6,27) läßt sich nun mit der Kontinuitätsgleichung (6,33) zu der *kovarianten* komplexen KLEIN-GORDON-Gleichung

$$\left( i\hbar\partial_l - \frac{e_K}{c}a_l^{\bar{K}} \right) \left( i\hbar\partial^l - \frac{e_K}{c}a_K^l \right) \psi_K = m_K^2 c^2 \psi_K \quad (6,40)$$

zusammenfassen, wobei wie bereits in (6,26) als Abkürzung

$$\partial^l \equiv \sqrt{g} g^{lr} \partial_r \quad (6,41)$$

gesetzt ist. Aus der komplexen Form (6,40) ist die Linearität der kombinierten Gleichungen bei *vorgegebenem* Viererpotential  $\tilde{a}_K^l$  in Bezug auf Abläufe in frei fallenden lokalen Inertialsystemen unmittelbar ersichtlich. Dies läßt sich folgendermaßen formulieren: Bei Vorgabe des Viererpotentials  $\tilde{a}_K^l$  und der Gravitationspotentiale  $g_{ik}$  gilt für unterschiedliche komplexe Lösungen  $\psi_{Kv}$  der jeweils zu untersuchenden KLEIN-GORDON-Gleichung *eines* herausgegriffenen Teilchens K das fundamentale Superpositionsprinzip. Im Falle einer Menge gleichartiger Teilchen bleibt dieses Prinzip mit der Einschränkung anwendbar, daß die Wechselwirkung zwischen den Teilchen gegenüber der Wechselwirkung mit dem vorgegebenen äußeren Feld vernachlässigt werden darf. Es ist allerdings klar, daß sich schon die Voraussetzung vorgegebener äußerer Potentiale auch nur näherungsweise erfüllen läßt.

Wie aber kann eine lineare Differentialgleichung, deren Lösungen doch dem Superpositionsprinzip unterworfen sind, stabile atomare Strukturen beschreiben? Die Antwort liegt meines Erachtens darin, daß dieses Superpositionsprinzip weder für den die Gestalt bestimmenden Formskalar  $q_K$ , noch für die mikroskopische Wirkung  $s_K$  Geltung hat, sondern allein für den komplexen SCHRÖDINGER-Skalar  $\psi_K$ . Gerade daraus erschließt sich dessen überragende Bedeutung. Seien nämlich  $\psi_{K1}(q_{K1}, s_{K1})$  und  $\psi_{K2}(q_{K2}, s_{K2})$  Lösungen der komplexen KLEIN-GORDON-Gleichung zu einem vorgegebenen äußeren Viererpotential  $\tilde{a}_K^l$ , wobei die Indizes  $,_{K1}$  und  $,_{K2}$  zwei mögliche Zustände des *einen* Teilchens K bezeichnen sollen, dann ist zwar auch  $\psi_K = (\psi_{K1} + \psi_{K2})$  eine Lösung dieser Gleichung. Doch sind nun *nicht* die Summen  $(q_{K1} + q_{K2})$  und  $(s_{K1} + s_{K2})$  Lösungen der reellen Wellengleichung (6,27) und der Kontinuitätsgleichung (6,33), sondern die Größen  $q_K$  und  $s_K$ , die sich mit  $\psi_K = (\psi_{K1} + \psi_{K2})$  aus (6,37) bzw. (6,38) ergeben.

Eine direkte Ausrechnung der *kovarianten* komplexen KLEIN-GORDON-Gleichung (6,40) liefert mit der Substitution (6,39) unter Beachtung der Identität

$$a_K^r \partial_r \equiv \sqrt{g} g^{lr} a_l^{\bar{K}} \partial_r \equiv a_l^{\bar{K}} \partial^l \quad (6,42)$$

eine Gleichung der Form  $X = iY$  mit *reellen* Termen  $X$  und  $Y$ , die demzufolge beide gleich Null sein müssen. Der Ausdruck  $X = 0$  enthält dann die kovariante reelle Wellengleichung (6,27), der mit  $q_K$  multiplizierte Ausdruck  $Y = 0$  die kovariante Kontinuitätsgleichung (6,33). Dadurch ist die komplexe Darstellung der entsprechenden Grundgleichungen noch einmal verifiziert.

Auch die Viererstromdichte (6,21) kann mittels der Substitutionen (6,37), (6,38) in eine vertraute Form gebracht werden, es ergibt sich in komplexer Schreibweise nämlich

$$\tilde{j}_K^l \equiv \frac{e_K}{m_K c} \left[ \frac{i\hbar}{2} (\psi_K^* \psi_K^l - \psi_K \psi_K^{*l}) - \frac{e_K}{c} a_K^l |\psi_K|^2 \right]. \quad (6,43)$$

Aus der oben abgeleiteten Normierungsbedingung (6,34), (6,35), die sich dementsprechend also auch schreiben läßt als

$$\int \tilde{\mu}_K dV \equiv \int \mu_K \tilde{u}_K^0 dV \equiv \frac{1}{c^2} \int \left[ \frac{i\hbar}{2} (\psi_K^* \dot{\psi}_K - \dot{\psi}_K \psi_K^*) - e_K a_K^0 |\psi_K|^2 \right] dV \stackrel{!}{=} m_K, \quad (6,44)$$

ist nun klar erkennbar, daß sie zu der üblicherweise gewählten Bedingung  $\int |\psi|^2 dV = 1$  in einem grundsätzlichen Widerspruch steht, wenn dieser auch numerisch in vielen Fällen nur zu kleinen Korrekturen Anlaß gibt (s.u.).

Daß infolge der Kontinuitätsgleichung (6,33) die Ladungsdichte eines Teilchens nicht notwendigerweise überall entweder nur positiv oder nur negativ sein muß, haben bereits PAULI und WEISSKOPF [31] betont. Daraus ergibt sich, daß aus der KLEIN-GORDON-Gleichung keine exakte Kontinuitätsgleichung für eine notwendigerweise positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte abgeleitet werden kann. Der Versuch, das ursprünglich der nicht-relativistischen Quantenmechanik entnommene – dort außerordentlich wertvolle – Wahrscheinlichkeitskonzept axiomatisch auch der relativistischen Theorie zugrunde zu legen, erweist sich im Falle der KLEIN-GORDON-Gleichung als ein Mißverständnis. Die genannten Autoren haben in diesem Zusammenhang mit voller Berechtigung auf die Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse von Elementarteilchen hingewiesen, die grundsätzlich im Widerspruch zur Wahrscheinlichkeitsinterpretation der nicht-relativistischen Quantenmechanik stehen.

Wie andererseits aus (6,44) unübersehbar hervorgeht, betrifft die eben angesprochene Eigenschaft indefiniter Ladungsdichte bei der KLEIN-GORDON-Gleichung auch die Ruhmassendichte, die allerdings gewiß positiv definit sein sollte. Meines Erachtens ist es viel eher diese Forderung – und nicht die Wahrscheinlichkeitsdeutung der nicht-relativistischen Theorie – die für eine notwendige Erweiterung zur DIRAC-Gleichung spricht (s. Anhang A). Jedenfalls aber ist es unvermeidlich, bei hinreichenden Energiewerten die Prozesse der Erzeugung oder Vernichtung von Elementarteilchen einzubeziehen, was jedoch über die Ausführungen der hier vorgelegten Skizze hinausgeht. Diese soll zunächst einmal einige bisher unbekannte Zusammenhänge aufzeigen, welche die Grundlagen der Physik betreffen, und einen neuen Zugang eröffnen.

Die bisher allgemein gebräuchliche Normierung war insofern inkonsistent, als sie die Ladung nicht auf  $\pm e$  normiert hat. Hätte man dies aber getan, so wäre nach herkömmlicher quantenmechanischer Berechnung die Energie in stationären Zuständen nicht mehr  $\varepsilon = \hbar\omega$  gewesen. Diese Inkonsistenz tritt im Rahmen der hier entwickelten Vorstellungen nicht mehr auf, wie in Abschnitt 7.1 explizit gezeigt wird. Die Bedeutung des zur Normierung bisher unverändert aus der nicht-relativistischen Theorie übertragenen Ausdrucks  $|\psi|^2$  aber wird erkennbar, wenn das Integral über die Dichte einer *gebundenen* Ruhemasse  $\mu_K \equiv m_K q_K^2 \equiv m_K |\psi_K|^2$

$$m_K^{(\text{gebunden})} \equiv \int \overline{\mu_K} dV \equiv m_K \int \overline{q_K^2} dV \equiv m_K \int \overline{|\psi_K|^2} dV \quad (6,45)$$

gebildet wird. Diese Dichte darf nicht mit derjenigen der *freien* Ruhemasse  $\tilde{\mu}_K \equiv m_K q_K^2 \tilde{u}_K^0 \equiv m_K |\psi_K|^2 \tilde{u}_K^0 \equiv -1/c |\psi_K|^2 \tilde{s}_K^0$  verwechselt werden, deren Integral gemäß (6,35) natürlich  $m_K$  sein muß. Für (6,45) dagegen wird sich bezüglich stationärer Zustände  $\int \mu_K dV = m_K + E_K/c^2$  ergeben [s. (6,90) und den dort stehenden Beweis], was einer in diesem Fall um die negative Bindungsenergie ergänzten Ruhemasse entspricht. Dies läßt sich schließlich auch schreiben als

$$\int \overline{|\psi_K|^2} dV = \frac{\varepsilon_K}{m_K c^2} \equiv 1 + \frac{E_K}{m_K c^2}, \quad (6,46)$$

wodurch der signifikante Unterschied zur bisher gebräuchlichen Normierungsbedingung unmißverständlich hervortritt.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch derjenige Anteil der Wirkungsichte (6,1-3) in komplexer Schreibweise angegeben, der den Formskalar  $q_K$  und den mikroskopischen Wirkungsskalar  $s_K$  bzw. deren Ableitungen enthält. Mit der Aufteilung

$$\hat{\Phi}_K \equiv \frac{1}{4} \mathbf{h}_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}} + \hat{\Phi}_K^\psi \quad (6,47)$$

ergibt sich bei Verwendung der Substitutionen (6,37), (6,38) sofort

$$\hat{\Phi}_K^\psi \equiv \frac{i}{2} \frac{\hbar e_K}{m_K c} a_l^{\bar{K}} \left\{ \psi_K^* \psi_K^l - \psi_K \psi_K^{*l} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m_K} \left\{ \psi_l^{*K} \psi_K^l \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{e_K^2}{m_K c^2} a_l^{\bar{K}} a_l^K - m_K c^2 \right\} \psi_K^* \psi_K, \quad (6,48)$$

was sich auch kürzer schreiben läßt, nämlich als

$$\Phi_K^\psi \equiv \frac{1}{2m_K} \left( i\hbar \psi_K^l - \frac{e_K}{c} a_K^l \psi_K \right) \left( i\hbar \psi_K^{*l} + \frac{e_K}{c} a_K^l \psi_K^* \right) + \frac{1}{2} m_K c^2 |\psi_K|^2. \quad (6,49)$$

Dieser Ausdruck ist in *ähnlicher* Form als LAGRANGE-Dichte des KLEIN-GORDON-Feldes wohlbekannt, ohne jedoch zu einem konsistenten Energie-Impuls-Tensor geführt zu haben, weil dies bei fehlender Zuordnung der elektromagnetischen Felder zu den verschiedenen Teilchen bisher nicht möglich war.

Bekanntlich sind diejenigen Lösungen der KLEIN-GORDON-Gleichung bzw. SCHRÖDINGER-Gleichung von fundamentaler Bedeutung, für welche bei vorgegebenem Viererpotential  $a_K^l$  gilt

$$\dot{q}_K = 0. \quad (6,50)$$

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß diese Voraussetzung (6,50) einer zeitunabhängigen Ladungsverteilung des Teilchens K auch die Zeitunabhängigkeit von  $\dot{s}_K$  impliziert, sodaß also einfach gelten soll

$$\dot{s}_K \stackrel{!}{=} \textit{konstant} := -\varepsilon_K, \quad (6,51)$$

(s. a. die allgemeinere Bedingung des Abschnitts 7.3). Für den hierdurch definierten *Stationaritäts-Parameter*  $\varepsilon_K$  existiert im allgemeinen ein ganzes Spektrum von Eigenwerten  $\varepsilon_{K\nu} \equiv -\dot{s}_{K\nu}$ , wobei der Index  $\nu$  die jeweiligen Zustände numeriert. Gerade darin liegt der Sinn der getroffenen Festsetzung (6,51), die allerdings mit einem daraus resultierenden vollständigen Orthonormalsystem nur in der SCHRÖDINGER- und DIRAC-Gleichung voll zum Tragen kommt (s. dazu auch Abschnitt 7.3). Ansonsten aber würde es mit Blick auf (6,50) bereits genügen,  $\varepsilon_K(\vec{r}) = \textit{konstant}|_t$  zu setzen. Die entsprechenden Lösungen sind also von der Form

$$\psi_{K\nu} \equiv q_{K\nu}(\vec{r}) e^{-i[\varepsilon_{K\nu} t - s_{K\nu}^{\text{Rest}}(\vec{r})] / \hbar}, \quad (6,52)$$

was formal auf eine Substitution  $s_{K\nu} \equiv -\varepsilon_{K\nu} t + s_{K\nu}^{\text{Rest}}(\vec{r})$  hinausläuft. Aus der damit insgesamt vorausgesetzten Zeitunabhängigkeit von  $q_{K\nu}$ ,  $\dot{s}_{K\nu}$  und  $\varphi_K$  folgt, daß sich die aus (6,21) mit Berücksichtigung von (6,51) entnommene Ladungsverteilung

$$\tilde{\rho}_{K\nu} = \frac{e_K}{m_K c^2} q_{K\nu}^2 (\varepsilon_{K\nu} - e_K \varphi_K) \quad (6,53)$$

in ihrer Gestalt nicht verändert. Es gilt also

$$\text{div} \tilde{\vec{j}}_{K\nu} \stackrel{!}{=} 0. \quad (6,54)$$

Das bedeutet selbstverständlich nicht, daß die dreidimensionale Stromdichte hier gleich Null sein müßte. Es genügt, daß sie ebenfalls unabhängig ist von der Zeit. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn bei fehlendem Vektorpotential  $\vec{a}_K$  gilt

$$s_{K\nu}^{\text{Rest}}(\vec{r}) = C_m \varphi, \quad (6,55)$$

wobei  $C_m = m \hbar$  eine Konstante von der Dimension einer Wirkung ist, mit  $m$  als magnetischer Quantenzahl und  $\varphi$  als polarer Winkelvariablen<sup>46)</sup>. Die entsprechenden Lösungen beschreiben demzufolge Zustände, die zutreffend als stationär bezeichnet werden und von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Quantenmechanik sind. Sie werden auch in Abschnitt 7.3 beim Nachweis der PLANCK'schen Energie-Frequenz-Beziehung eine wichtige Rolle spielen.

<sup>46)</sup> Die nicht indizierte Koordinate  $\varphi$  ist nicht zu verwechseln mit dem elektrischen Potential  $\varphi_K$  des Teilchens K (ein vorgegebenes äußeres elektrisches Potential wird demgegenüber als  $\phi$  bezeichnet).

### 6.3.d Die SCHRÖDINGER-Gleichung als einfache Näherung

Bereits das ursprüngliche HEISENBERG'sche Konzept der nicht-relativistischen Quantenmechanik [32] beruht letztlich – wie auch aus SCHRÖDINGERS grundlegenden Arbeiten [33], [34] hervorgeht – auf der Existenz solcher stationärer Funktionen, die aufgrund (6,50-51) in der Form

$$\psi_{K_V} \equiv r_{K_V} e^{-i\varepsilon_{K_V} t / \hbar} \quad (6,56)$$

geschrieben werden können, wobei  $\varepsilon_{K_V}$  die jeweiligen Energiewerte bezeichnen, und die zeitunabhängigen – im allgemeinen komplexen – Funktionen  $r_{K_V} \equiv q_{K_V}(\vec{r}) e^{i s_{K_V}(\vec{r}) / \hbar}$  ein vollständiges Orthonormalsystem bilden. Der Einfachheit halber werden hier frei fallende Systeme vorausgesetzt, in denen mit  $g_{ik}^{\text{lokal}} \approx \eta_{ik} \equiv (+1, -1, -1, -1)$  wieder die spezielle Relativitätstheorie gilt. Für die zeitlich konstanten Funktionen  $r_{K_V}$  geht mit dem Ansatz (6,56) die reelle Wellengleichung (6,27) bei konservativen Systemen wegen des dort verschwindenden äußeren Vektorpotentials  $\vec{a}_{\vec{K}} = 0$  zunächst über in

$$\left[ (\varepsilon_{K_V} - e_K \varphi_{\vec{K}})^2 - c^2 (\vec{\nabla}_{S_{K_V}})^2 - m_K^2 c^4 \right] q_{K_V} = -\hbar^2 c^2 \Delta q_{K_V}. \quad (6,57)$$

Daraus läßt sich unter den hier gegebenen Voraussetzungen die entsprechende SCHRÖDINGER-Gleichung mit Hilfe der Substitutionen

$$\varepsilon_{K_V} \equiv m_K c^2 + E_{K_V} \quad (6,58)$$

und

$$e_K \varphi_{\vec{K}} \equiv U \quad (6,59)$$

als besonders einfache Näherung für stationäre Lösungen im nicht-relativistischen Fall  $|E_{K_V}| \ll m_K c^2$  gewinnen,

$$\frac{\hbar^2}{2m_K} \Delta R_{K_V} + (E_{K_V} - U) R_{K_V} = 0, \quad (6,60)$$

wobei für  $q_{K_V}$  aus (6,57) die oben definierten Funktionen  $r_{K_V}$  mit  $R_{K_V}$  als den entsprechenden Lösungen von (6,60) approximativ übereinstimmen. Es ist erstens von Bedeutung, daß in (6,59-60) das von *allen* anderen Teilchen außer K gebildete Potential auftritt. Zweitens sind die Quellen der Einzelpotentiale *keineswegs* punktförmige Teilchen, sondern Ladungsverteilungen endlicher Ausdehnung. Beides zusammen bewirkt, daß in  $U$  neben der immer nur für hinreichende Abstände realisierten  $1/r$ -Abhängigkeit der COULOMB-Wechselwirkung z.B. auch – wie für Atomkerne in Molekülen – die charakteristische  $r^2$ -Abhängigkeit des Oszillatorpotentials auftritt.

Dieser Aspekt könnte eine mögliche Ungereimtheit der relativistischen Quantenmechanik entschärfen, daß nämlich ausgerechnet dort PLANCKS fundamental einfache Energiewerte des harmonischen Oszillators nicht exakt resultieren. Doch ist es meines Erachtens das zugrundegelegte klassische Oszillatorpotential  $U = \frac{1}{2} k x^2$  bzw.  $\frac{1}{2} k r^2$  selbst, das sich in der gesamten Natur nirgendwo exakt, sondern überall nur *näherungsweise* realisiert findet. Aufgrund des atomaren Aufbaus der Materie kann es die im Sinne der klassischen Physik vorausgesetzten *makroskopisch* glatten Potentiale  $U$  ja überhaupt nicht geben. Darüberhinaus ist die SCHRÖDINGER-Gleichung auf ‚klassische‘ Objekte nicht ohne grundsätzliche Einschränkungen anwendbar. Angesichts des konsistenten Variationsprinzips folgen diese Einschränkungen daraus, daß bei zusammengesetzten Körpern jedem seiner Teilchen genaugenommen eine *eigene* KLEIN-GORDON-Gleichung zuzuordnen ist<sup>47)</sup>.

Im Rahmen der klassischen Physik aber entsteht der Eindruck einheitlicher physikalischer Gebilde erst durch vereinfachende Zusammenfassung. Es wird oft so getan, als gebe es kontinuierliche Komplexe, die sich z.B. bei Bedarf mathematisch äquivalent in FOURIER-Reihen zerlegen lassen (Analyse), während in Wirklichkeit

<sup>47)</sup> Daraus ergibt sich übrigens sofort, daß einem makroskopischen Objekt grundsätzlich immer ein ‚Wellenpaket‘ und nicht eine einzelne Wellenfunktion entspricht. Die quantenmechanische Beschreibung eines zusammengesetzten Objekts durch eine einzige 3+1-dimensionale Wellenfunktion ist unter diesem Aspekt, wie EINSTEIN betont hat, prinzipiell unvollständig.

umgekehrt der Eindruck einheitlicher Komplexe oft erst durch vereinfachende Zusammenfassung einer Vielzahl von Komponenten entsteht (Synthese). – Mit dem im Vergleich zu (6,56) allgemeineren Ansatz

$$s_K \equiv -m_K c^2 t + \sigma_K(t, \vec{r}) \quad (6,61)$$

zur Behandlung von Teilchen im elektromagnetischen Feld – seien diese nun tatsächlich spinfrei oder werden die an die Existenz eines Eigendrehimpulses gebundenen Effekte lediglich vernachlässigt – ergibt sich aus der Wellengleichung (6,27) für

$$|\dot{\sigma}_K + e_K \varphi_{\bar{K}}| \ll m_K c^2 \quad (6,62)$$

näherungsweise zunächst

$$q_K \left[ 2m_K (\dot{\sigma}_K + e_K \varphi_{\bar{K}}) + \left( \vec{\nabla} \sigma_K - \frac{e_K}{c} \vec{a}_{\bar{K}} \right)^2 \right] \approx \hbar^2 \square q_K, \quad (6,63)$$

wobei  $\square \equiv \Delta - \partial_{tt}/c^2 \equiv -\partial_t^2$  für den D'ALEMBERT-Operator steht und hier wieder alle auftretenden Größen durchgängig reell sind. Außerdem läßt sich die Kontinuitätsgleichung (6,32) mit (6,62) in gleicher Näherung schreiben als

$$\partial_t (q_K^2) + \operatorname{div} \left[ \frac{1}{m_K} q_K^2 \left( \vec{\nabla} \sigma_K - \frac{e_K}{c} \vec{a}_{\bar{K}} \right) \right] \approx 0. \quad (6,64)$$

Beim Übergang von  $q_K$  zu  $Q_K$  entspricht (6,64) exakt der wohlbekannten Kontinuitätsgleichung der nicht-relativistischen Quantenmechanik, wenn deren komplexer Skalar  $\chi_K$  mit Rücksicht auf (6,61) gemäß der zu (6,39) analogen Substitution

$$\chi_K \equiv Q_K e^{i\sigma_K/\hbar} \quad (6,65)$$

verwendet wird. Ebenso läßt sich bei dem gleichen Übergang in (6,63) das Zeichen „ $\approx$ “ durch ein Gleichheitszeichen ersetzen, wodurch  $\chi_K$  als Näherung von  $\psi_K$  eindeutig festgelegt ist. Im Vergleich zur ursprünglichen Kontinuitätsgleichung (6,32) ist der Ausdruck für die räumlichen Komponenten der Stromdichte bis auf einen konstanten Faktor unverändert geblieben. Die in Kontinuitätsgleichung (6,64) nach besagten Übergang von  $q_K$  zu  $Q_K$  auftretende Komponente  $Q_K^2 \equiv |\chi_K|^2$  allerdings ist nun offensichtlich positiv definit und erlaubt deshalb die Deutung als Wahrscheinlichkeitsdichte.

Die beiden auf diese Weise aus (6,63) und (6,64) neu entstandenen Näherungsgleichungen aber lassen sich mittels der Substitution (6,65) zusammenfassen zur wohlbekannten SCHRÖDINGER-Gleichung für spinfreie Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$\left( i\hbar \partial_t - e_K a_0^{\bar{K}} \right) \chi_K - \frac{1}{2m_K} \left( i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e_K}{c} \vec{a}_{\bar{K}} \right)^2 \chi_K = 0. \quad (6,66)$$

Dazu ist lediglich die durch (6,63) beschriebene Näherung zuvor sinngemäß zu vervollständigen. In Bezug auf den oben auftretenden D'ALEMBERT-Operator bedeutet das, daß dieser für den Übergang zu (6,66) gemäß  $\square \rightarrow \Delta$  zu ersetzen ist. Denn bekanntlich lassen sich nicht-relativistische Näherungen mathematisch dadurch bewerkstelligen, daß in den – jeweils geeignet geschriebenen – relativistischen Gleichungen formal ein Grenzübergang  $c \rightarrow \infty$ , d.h. hier  $1/c^2 \rightarrow 0$  durchgeführt wird.

Die in (6,66) gegebene nicht-relativistische SCHRÖDINGER-Gleichung<sup>48)</sup> unterscheidet sich von der KLEIN-GORDON-Gleichung nicht nur durch die in der zugehörigen Kontinuitätsgleichung beschriebene positiv definite Dichte, sondern ganz wesentlich auch dadurch, daß sie sich als Eigenwertproblem der bemerkenswert einfachen Form  $H R_K = \varepsilon_K R_K$  zur Bestimmung der Energiewerte  $\varepsilon_K$ , stationärer Zustände auffassen läßt<sup>49)</sup>, wobei  $\hat{H}$  für

<sup>48)</sup> Ohne den Übergang von  $q_K$  zu  $Q_K$  hätte hierin anstatt des Gleichheitszeichens ein „ $\approx$ “ stehen müssen. Umgekehrt kann bei demselben Übergang in (6,64) das Zeichen „ $\approx$ “ durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden.

<sup>49)</sup> SCHRÖDINGERS grundlegende Arbeiten [33] tragen bekanntlich den Titel „*Quantisierung als Eigenwertproblem*“ (vier Mitteilungen).

den jeweiligen HAMILTON-Operator steht. Die Eigenfunktionen  $R_{K\nu}$  zu verschiedenen Eigenwerten  $\varepsilon_{K\nu}$  sind dann ohne weiteres orthogonal, und es läßt sich auch im Falle der Entartung immer ein vollständiges Orthonormalsystem gewinnen, was von fundamentaler Bedeutung ist.

Jede Situation der klassischen Physik nämlich läßt sich jederzeit im Sinne einer FOURIER-Synthese durch Superposition der Funktionen eines beliebigen vollständigen Orthonormalsystems darstellen, wobei die prinzipiellen Beschränkungen dieser Darstellungen durch die HEISENBERG'schen Unschärferelationen gegeben sind.

Die sich speziell aus der SCHRÖDINGER-Gleichung zur jeweiligen potentiellen Energie  $U$  ergebenden *angepaßten* vollständigen Orthonormalsysteme gewährleisten im Unterschied zu allen anderen, daß sich irgendwelche daraus in geeigneter Weise gebildete Wellenpakete unter dem Einfluß von  $U$  auf korrespondenzmäßig klassischen Bahnen bewegen können. Im Falle gebundener Zustände ist das zugehörige Spektrum diskret, und die Bewegung erfolgt, ohne daß ein Wellenpaket auf Dauer zerfließen muß, was bei dessen Bildung aus nicht angepaßten Lösungen zwangsläufig der Fall wäre. Ein spezielles nicht-zerfließendes Wellenpaket auf korrespondenzmäßig klassischer Bahn wurde für den Sonderfall des harmonischen Oszillators von SCHRÖDINGER [35] schon bald nach der Entdeckung seiner Gleichung explizit angegeben.

Im Sinne der vorausgegangenen Anmerkungen ist es ein glücklicher Umstand, daß die nicht-relativistische SCHRÖDINGER-Gleichung einige Züge trägt, die bereits über die KLEIN-GORDON-Gleichung hinausweisen – obwohl sie in dieser doch nur als Näherung enthalten ist. Wesentliche Merkmale treten erst wieder in der Erweiterung der KLEIN-GORDON-Gleichung zur DIRAC-Gleichung auf.

#### 6.4 Die EINSTEIN'schen Gleichungen im quantenmechanischen Zusammenhang

Nachdem die Variation des aufsummierten Anteils  $\bar{\Phi}_K$  der Wirkungsdichte (6,1-3) nach den mikroskopischen elektromagnetischen Potentialen  $a_l^{\bar{K}}$  bezüglich der einzelnen Teilchen die MAXWELL'schen Gleichungen in quantisierter Form gebracht, und die Variation nach Skalarfunktion  $q_K$  sowie mikroskopischer Wirkung  $s_K$  zusammen die KLEIN-GORDON- und SCHRÖDINGER-Gleichung ergeben haben, fehlt im Sinne des konsistenten Prinzips nur noch die Variation der gesamten Wirkungsdichte  $\Phi \equiv \bar{\Phi} + \check{\Phi}$  nach dem Fundamentaltensor der allgemeinen Relativitätstheorie, um in das Zusammenspiel von Elektrodynamik und Quantenmechanik schließlich auch die Gravitation miteinzubeziehen.

Wie ich in einer kurzen Note [36] gezeigt habe, hat die Besonderheit, daß sich die Wirkungsdichte  $\check{\Phi}$  des Gravitationsfeldes gemäß (6,3) aus den *kontravarianten* Komponenten  $g^{ik}$  und den Ableitungen  $g_{lik}$  der *kovarianten* Komponenten *algebraisch* zu dem geschlossenen Ausdruck  $G$  zusammensetzt, offenbar zu einigen historischen Verwicklungen geführt, die sich aber auf die vorher auf anderem Weg gefundenen EINSTEIN'schen Gleichungen nicht ausgewirkt haben. Hier nun ergibt sich zunächst

$$\int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \Phi}{\partial g_{lab}} \delta g_{lab} \right) d\Omega = 0. \quad (6,67)$$

Dabei kommt es nicht darauf an – wie von HILBERT, EINSTEIN, PAULI bis zu LANDAU-LIFSCHITZ und anderen Autoren in ihren entsprechenden Formulierungen offenbar irrtümlich angenommen<sup>50)</sup> – daß im Variationsprinzip notwendigerweise die vorkommenden Größen zusammen mit ihren unmittelbaren Ableitungen auftreten, sondern es genügt, daß die Variation im Sinne eines totalen Differentials vollständig ist.

Das Verschwinden der Variation auf einer geschlossenen Berandung des Integrationsgebietes vorausgesetzt, folgt aus (6,67) nach dem üblichen Verfahren der partiellen Integration nun

$$\int \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} - \partial_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial g_{lab}} \right) \delta g_{ab} \right] d\Omega = 0, \quad (6,68)$$

woraus sich mit der vertrauten Beziehung  $\delta g_{ab} := -g_{ia} g_{kb} \delta g^{ik}$  schließlich

<sup>50)</sup> Eine berühmte freundschaftliche Kontroverse mit LEVI-CIVITA vom Frühjahr 1915 – die seinerzeit offen blieb und bis heute ansonsten unverständlich scheint – hat meines Erachtens auf einem diesbezüglichen Irrtum EINSTEINS beruht. Der gleiche Irrtum findet sich auch bei HILBERT (S. [36]).

$$\int \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial g^{ik}} + g_{ia} g_{kb} \partial_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial g_{lab}} \right) \right] \delta g^{ik} d\Omega = 0 \quad (6,69)$$

ergibt. Die negative Determinante  $g = -|g_{ik}|$  des kovarianten Fundamentaltensors  $g_{ik}$  wird hier stets als Funktion  $g \equiv -1/|g^{ik}|$  der kontravarianten Komponenten  $g^{ik}$  betrachtet, was die im weiteren Verlauf benutzte Relation  $\partial \sqrt{g} / \partial g^{ik} = -1/2 \sqrt{g} g_{ik}$  impliziert. Wegen willkürlich wählbarer  $\delta g^{ik}$  bedeutet Gleichung (6,69) aber

$$g_{ia} g_{kb} \partial_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial g_{lab}} \right) = - \frac{\partial \Phi}{\partial g^{ik}}. \quad (6,70)$$

Mit

$$\Phi \equiv \bar{\Phi} + \frac{1}{2\kappa} \mathbf{G} \quad (6,71)$$

wird daraus die Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial g^{ik}} + g_{ia} g_{kb} \partial_l \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial g_{lab}} \right) = -2\kappa \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial g^{ik}} + g_{ia} g_{kb} \partial_l \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial g_{lab}} \right) \right]. \quad (6,72)$$

Wie sich bei Verwendung von  $\mathbf{G}$  in der Form (6,3) durch direkte Ausrechnung verifizieren läßt<sup>51)</sup>, ist die linke Seite nichts anderes als die Dichte  $\mathbf{E}_{ik}$  des EINSTEIN-Tensors  $E_{ik} \equiv R_{ik} - 1/2 R g_{ik}$  mit dem RICCI-Tensor  $R_{ik}$  und seiner Spur  $R$  (s. [36]), wohingegen die rechte Seite die Energie-Impuls-Tensordichte  $\mathbf{T}_{ik}$  der Materie ergibt. Damit folgen die EINSTEIN'schen Gleichungen hier also in der vertrauten Form

$$\mathbf{E}_{ik} \equiv \mathbf{R}_{ik} - \frac{1}{2} \mathbf{R} g_{ik} = \kappa \mathbf{T}_{ik}. \quad (6,73)$$

EINSTEIN hat bekanntlich in seinen Gleichungen auf der rechten Seite für  $\mathbf{T}_{ik}$  den phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor der Materie  $\mathbf{M}_{ik} \equiv \mu_0 c^2 U_i U_k$  eingesetzt und bei Bedarf um einen Druckterm  $-\mathbf{p} g_{ik}$  ergänzt. HILBERT hat hier den Energie-Impuls-Tensor der MIE'schen Theorie [6] erhalten, der zwar aus seinem Variationsprinzip deduktiv abgeleitet, mit dem von EINSTEIN verwendeten – inzwischen in zahllosen Situationen exzellent bewährten – phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor aber nicht kompatibel ist. Letzterer mußte also bisher gewissermaßen *ad hoc* eingeführt werden.

Demgegenüber wird sich der unmittelbar aus dem hier zugrundegelegten Variationsprinzip resultierende Energie-Impuls-Tensor der *ponderablen* Materie – einschließlich der Beiträge aller Felder mit Ausnahme des Gravitationsfeldes selbst – erstmals konsistent in die EINSTEIN'schen Gleichungen (6,73) einfügen, die damit eine gewisse Vervollständigung erfahren. Mit Rücksicht auf die links- wie rechtsseitige Übereinstimmung der Gleichungen (6,72) und (6,73) implizieren diese die Definition

$$-2 \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial g^{ik}} + g_{ia} g_{kb} \partial_l \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial g_{lab}} \right) \right] \equiv \mathbf{T}_{ik}^K. \quad (6,74)$$

Die entsprechende Berechnung soll erst in einem eigenen Abschnitt 6.5 erfolgen, wo auch der Nachweis einer unter verschiedenen Aspekten durchgängigen Konsistenz erbracht wird. Dieser Nachweis betrifft nicht nur die Tatsache, daß sich der gewöhnlich verwendete phänomenologische Energie-Impuls-Tensor dort als Näherung ergibt, sondern auch den Umstand, daß in frei fallenden lokalen Inertialsystemen für den Energie-Impuls-Tensor der Materie  $T_{ik} \equiv \Sigma T_{ik}^K$  die Erhaltungsgleichungen (4,1) gültig sind.

Demgegenüber aber ist bei gravitierenden Körpern, die nicht insgesamt als *ein einziges* frei fallendes lokales Inertialsystem aufgefaßt werden können, in größerer Allgemeinheit

<sup>51)</sup> Dies ist bei expliziter Durchführung weder die kürzeste noch die eleganteste Möglichkeit, den EINSTEIN-Tensor aus einer Variation von  $\mathbf{G}$  zu erhalten, aber darauf kommt es hier nicht an.

$$T_{i;k}^k \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \partial_k \mathbf{T}_i^k - \frac{1}{2} \mathbf{T}^{lm} g_{ilm} \right) = 0 \quad (6,75)$$

zu setzen, was aufgrund der kontrahierten BIANCHI-Identitäten aus (6,73) folgt. Dies läßt sich unmittelbar in der äquivalenten Form

$$\partial_k \mathbf{V}_i^k \equiv \partial_k \left( \mathbf{T}_i^k + \mathbf{t}_i^k \right) = 0 \quad (6,76)$$

mit dem üblicherweise als Pseudotensor-Dichte bezeichneten Ausdruck für die Energie des Gravitationsfeldes

$$\mathbf{t}_i^k \equiv \frac{1}{2} \left( \mathbf{G} \delta_i^k - g_{ilm} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial g_{klm}} \right) \quad (6,77)$$

verifizieren. Wird nun für  $\mathbf{T}_i^k$  der weiter unten als Näherung abgeleitete Ausdruck (6,91) eingesetzt, so ergibt sich aufgrund der Kontinuitätsgleichung der Materie

$$\partial_k \left( \mu_L u_L^k \right) = 0 \quad (6,78)$$

schließlich für das herausgegriffene Teilchen L im Gravitationsfeld aus (6,76) oder (6,75) EINSTEINS ‚geodätisches‘ Bewegungsgesetz

$$\frac{du_i^L}{ds} - \frac{1}{2} u_L^k u_L^l g_{ikl} = 0, \quad (6,79)$$

das damit aus dem konsistenten Variationsprinzip (6,1) näherungsweise abgeleitet ist. – Bei dieser Gelegenheit sei auch eine bisher stillschweigend übergangene Begründung nachgereicht. Im Verlauf der oben durchgeführten Behandlung wurde bei der Umformung von (6,67) zu (6,68) nach allgemeinem Gebrauch die Ersetzung  $\delta g_{lab} \equiv \delta(\partial_l g_{ab}) := \partial_l(\delta g_{ab})$  vorgenommen. Die Berechtigung dieser Vorgehensweise findet hier nachträglich ihre Bestätigung darin, daß in den von Anfang an zum Ziel gesetzten Kontinuitätsgleichungen für die Dichten von Gesamtenergie und -impuls (6,78) bei konkreter Ausrechnung jedem  $\delta(\cdot)$  eine partielle Differentiation entspricht, die sich mit einer unmittelbar darauf folgenden anderen partiellen Differentiation selbstverständlich vertauschen läßt. Dies gilt in allen entsprechenden Fällen der vorausgegangenen Unterabschnitte ganz analog.

## 6.5 Die Konsistenz des assoziierten Energie-Impuls-Tensors von Feld und Teilchen

Es soll nun der sich aus dieser Ableitung der EINSTEIN’schen Gleichungen (6,73) ergebende quantenmechanische Energie-Impuls-Tensor von Feld und Materie berechnet werden. Mit  $\hat{\Phi}_K \equiv \sqrt{g} \Phi_K$  folgt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in  $\hat{\Phi}_K$  keine Ableitungen  $g_{ik}$  des Fundamentaltensors auftreten, aus (6,74) zunächst

$$\mathbf{T}_{ik}^K = -2 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial g^{ik}} = g_{ik} \hat{\Phi}_K - 2 \sqrt{g} \frac{\partial \hat{\Phi}_K}{\partial g^{ik}}. \quad (6,80)$$

Unter Zugrundelegung der materiellen Wirkungsichte (6,2) eines herausgegriffenen Teilchens K ergibt sich für den zur KLEIN-GORDON-Gleichung führenden Ansatz (6,9) der Ausdruck  $\partial \hat{\Phi}_K / \partial g^{ik}$  aus den drei einfachen Bestandteilen

$$\frac{\partial}{\partial g^{ik}} \left( \frac{1}{4} f_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}} \right) \equiv \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial g^{ik}} \left( g^{lr} g^{ms} f_{rs}^K f_{lm}^{\bar{K}} \right) = \frac{1}{4} \left( f_K^{Km} f_{im}^{\bar{K}} + f_i^{Km} f_{km}^{\bar{K}} \right) \quad (6,81)$$

und 
$$\frac{\partial}{\partial g^{ik}} \left( -\frac{1}{2m_K} q_K^2 \tilde{s}_K^l \tilde{s}_l^K \right) = -\frac{1}{2m_K} q_K^2 \frac{\partial}{\partial g^{ik}} \left( g^{lr} \tilde{s}_r^K \tilde{s}_l^K \right) = -\frac{1}{2m_K} q_K^2 \tilde{s}_i^K \tilde{s}_k^K \quad (6,82)$$

und 
$$\frac{\partial}{\partial g^{ik}} \left( -\frac{\hbar^2}{2m_K} q_K^l q_l^K \right) = -\frac{\hbar^2}{2m_K} \frac{\partial}{\partial g^{ik}} \left( g^{lr} q_r^K q_l^K \right) = -\frac{\hbar^2}{2m_K} q_i^K q_k^K. \quad (6,83)$$

Mit diesen Zwischenresultaten wird aus (6,80) nun zunächst

$$\mathbf{T}_{ik}^K = g_{ik} \hat{\Phi}_K - \frac{1}{2} \left( f_{im}^K \mathbf{f}_k^{Km} + \mathbf{f}_{km}^K f_i^{Km} \right) + \frac{1}{m_K} q_K^2 \tilde{s}_i^K \tilde{s}_k^K + \frac{\hbar^2}{m_K} q_i^K q_k^K. \quad (6,84)$$

Spätestens an dieser Stelle wird offenbar, daß sich eine grundsätzliche ‚Eichinvarianz‘ der elektromagnetischen Potentiale konsequent bis in den Energie-Impuls-Tensor hinein erstreckt, in dem Sinne, daß die Potentiale hier nur in der Kombination  $\tilde{s}_i^K = s_i^K + e_K/c a_i^K$  auftreten. Eindeutigkeit wird allein aufgrund der in Abschnitt 5.3 besprochenen Zerlegung und Festsetzung hergestellt.

Der gesamte Energie-Impuls-Tensor ergibt sich aus diesem Anteil des Teilchens K im Hinblick auf (6,1) durch Summenbildung zu

$$\mathbf{T}_{ik} \equiv \sum_K \mathbf{T}_{ik}^K, \quad (6,85)$$

was sich nach Ausschreiben dieses Ausdrucks durch teilweise Umsortierung der einzelnen Summanden mit anschließender Neugruppierung zuletzt noch kürzer schreiben läßt in der Form

$$\mathbf{T}_{ik} \equiv \sum_L \mathbf{T}_{ik}^L, \quad (6,86)$$

wobei nun

$$\mathbf{T}_{ik}^L = -f_{im}^L \mathbf{f}_k^{Lm} + \frac{1}{m_L} q_L^2 \tilde{s}_i^L \tilde{s}_k^L + \frac{\hbar^2}{m_L} q_i^L q_k^L + g_{ik} \left[ \frac{1}{4} f_{lm}^L \mathbf{f}_L^{lm} - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m_L} \partial_l \left( q_L^l \mathbf{q}_L^l \right) \right]. \quad (6,87)$$

Der Grund dafür liegt darin, daß zwar nicht in den einzelnen Summanden  $\mathbf{T}_{ik}^K$ , wohl aber in der ausgeschriebenen Summe (6,84-85) jeder Bestandteil der Form  $(f_{im}^X \mathbf{f}_k^{Ym} + \mathbf{f}_{km}^X f_i^{Ym})$  genau zweimal auftritt, davon beispielsweise der erste Summand sowohl in  $f_{im}^K \mathbf{f}_k^{Km}$  als auch in  $\mathbf{f}_{km}^K f_i^{Km}$ . Dies läßt sich im Sinne einer vollständigen Induktion leicht verifizieren<sup>52)</sup> und wird zusätzlich auch am einfachen Beispiel des H-Atoms in Abschnitt 7.1 noch einmal anschaulich gezeigt. – Beim Übergang zu (6,87) wurde in (6,84) von der nützlichen Beziehung

$$\hat{\Phi}_{K(\text{Lösung})} = \frac{1}{4} \mathbf{f}_K^{lm} f_{lm}^K - \frac{\hbar^2}{2m_K} \partial_l \left( q_K^l \mathbf{q}_K^l \right) \equiv \frac{1}{4} \left[ \mathbf{f}_K^{lm} f_{lm}^K - \frac{\hbar^2}{m_K} \sqrt{g} \left( q_K^2 \right)_{;l}^l \right] \quad (6,88)$$

Gebrauch gemacht, die sich *nachträglich* für alle Lösungen der reellen Wellengleichung (6,27) aus (6,2), (6,9) ableiten läßt. Es ist zu beachten, daß im Unterschied zu dem Summanden  $\mathbf{T}_{ik}^K$  der Summe (6,85) der zuletzt verwendete Summand  $\mathbf{T}_{ik}^L$  der nur im Ergebnis gleichwertigen Summe (6,86) *nicht* symmetrisch ist, was aber die Symmetrie des *gesamten* Energie-Impuls-Tensors  $\mathbf{T}_{ik}$  nicht beeinträchtigt.

An dieser Stelle sei nun auch die Spur der durch Heben des Index  $k$  aus (6,87) gebildeten gemischten Energie-Impuls-Tensordichte  $\mathbf{T}_i^{kL}$  angegeben mit dem Ergebnis

$$\mathbf{T}_i^{iL} = m_L c^2 q_L^2 - \frac{\hbar^2}{m_L} \partial_l \left( q_L^l \mathbf{q}_L^l \right) \equiv \sqrt{g} \left[ m_L c^2 q_L^2 - \frac{\hbar^2}{2m_L} \left( q_L^2 \right)_{;i}^i \right]. \quad (6,89)$$

Neben der wohlbekannten Tatsache, daß die Spur des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes verschwindet, wurde in der einfachen Berechnung auch die reelle Wellengleichung in der Form (6,25) zur Umformung benutzt. Mit Anwendung des in Abschnitt 4.2 besprochenen LAUE-Theorems auf die Spur (6,89) des konsistenten Energie-Impuls-Tensors (6,87) läßt sich ein höchst einfacher Ausdruck für die Gesamtenergie des Systems gewinnen. Und zwar ergibt sich

<sup>52)</sup> Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei angemerkt, daß also bei einem direkten Vergleich von (6,84) und (6,87) der Sachverhalt  $\mathbf{T}_{ik}^K \neq \mathbf{T}_{ik}^L$  zu beachten ist, wohingegen die Summen (6,85) und (6,86) selbstverständlich beide  $\mathbf{T}_{ik}$  ergeben.

$$\varepsilon_{\Sigma} \equiv \sum_L \varepsilon_L \stackrel{!}{=} \sum_L \int \bar{\mathbf{T}}_i^{iL} dV = \sum_L m_L c^2 \int \sqrt{g} q_L^2 dV, \quad (6,90)$$

wobei in diesem Zusammenhang die Überstreichung – wie z.B. bei  $\bar{\mathbf{T}}_i^{iL}$  – jeweils eine zeitliche Mittelwertbildung bedeuten soll. Hier wurde benutzt, daß das Integral über den räumlichen Anteil des letzten Summanden in (6,89) verschwindet, ebenso wie der zeitliche Mittelwert der von diesem Summanden verbleibenden zeitlichen Ableitung<sup>53)</sup>.

An dieser Stelle sei auch der in Abschnitt 6.3.c angekündigte Beweis nachgetragen. Bei Betrachtung eines Teilchens, das sich in einem der dort definierten stationären Zustände befindet, wird  $q_L$  nach Voraussetzung zeitunabhängig, sodaß hier aus (6,90) auf  $m_L c^2 + E_L \equiv \varepsilon_L = m_L c^2 \int q_L^2 dV$  geschlossen werden darf. Für diese Zustände ergibt sich daraus mit  $\int |\psi_L|^2 dV = 1 + E_L / m_L c^2$  sofort die oben angegebene Beziehung.

In dem Ausdruck (6,86-87) ist nun<sup>54)</sup> ein detaillierter Energie-Impuls-Tensor der Materie gefunden, der – wie sich im weiteren bestätigen wird – grundsätzlich den in den vorausgegangenen Abschnitten begründeten Ansprüchen genügt. Insbesondere sei hier auch die in Abschnitt 6.4 bereits benutzte einfachste Näherung für den Spezialfall nicht wechselwirkender, staubförmiger Materie explizit angegeben

$$\mathbf{T}_{ik}^{L(\text{Staub})} \approx \frac{1}{m_L} q_L^2 s_i^L s_k^L \equiv \mu_L c^2 u_i^L u_k^L, \quad (6,91)$$

die sich bei Vernachlässigung von Quantenkorrekturen durch den formalen Übergang  $\hbar \rightarrow 0$  für ungeladene Teilchen ( $e_K = 0$ ) aus (6,87) im feldfreien Raum ( $f_{lm}^K = 0$ ) ergibt. Neben der Abkürzung (6,8) wurde dabei  $u_i^L \equiv -s_i^L / m_L c$  verwendet, was implizit in (6,21) enthalten ist. Es bedarf demnach keiner weiteren Begründung, daß bei Summenbildung über den Teilchenindex  $L$  der Ausdruck (6,91) in den phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor der Materie (5,2) übergeht. – Eine weniger grobe Näherung, welche darüberhinaus die Bewegungsgleichungen (5,4) der MAXWELL-LORENTZ'schen Elektrodynamik ergibt, wird in Abschnitt 8.3 abgeleitet.

Nun aber soll zunächst der in 6.4 angekündigte Nachweis vervollständigt werden. Bezüglich frei fallender lokaler Inertialsysteme<sup>55)</sup> hat der Tensor (6,86) den fundamentalen Erhaltungssätzen (4,1) zu genügen, wenn es sich tatsächlich um einen *konsistenten* Energie-Impuls-Tensor handeln soll. Aufgrund des Äquivalenzprinzips gilt hier die spezielle Relativitätstheorie mit dem lokalen Fundamentaltensor  $g_{ik}^{\text{lokal}} := \eta_{ik}$  und  $\sqrt{g} := 1$ , wodurch in der oben zugrundegelegten Wirkungsichte (6,1) der Anteil  $\bar{\Phi}$  gemäß (6,3) verschwindet, und in (6,2) sämtliche dort auftretenden (fettgedruckten) Tensordichten einfach in entsprechende Tensoren übergehen. Die Erfüllung der Forderung (4,1) wird nun dadurch verifiziert, daß unter Beachtung von (6,9) für die lokale Wirkungsichte

$$\hat{\Phi} \equiv \sum_K \hat{\Phi}_K \quad (6,92)$$

mit

$$\hat{\Phi}_K \equiv \frac{1}{4} f_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}} - \frac{1}{2m_K} q_K^2 \tilde{s}_K^l \tilde{s}_l^K + \frac{1}{2} m_K c^2 q_K^2 - \frac{\hbar^2}{2m_K} q_K^l q_l^K \quad (6,93)$$

direkt die Änderung  $\partial_i \hat{\Phi}$  berechnet wird. Diese läßt sich bei Rückgriff auf die oben abgeleiteten Grundgleichungen (6,11), (6,19), (6,27) und (6,33) der quantisierten Elektrodynamik Schritt für Schritt umformen in

$$\partial_i \hat{\Phi} = \partial_k \sum_L \left( f_{im}^{\bar{L}} f_L^{km} - \frac{1}{m_L} q_L^2 \tilde{s}_i^L \tilde{s}_L^k - \frac{\hbar^2}{m_L} q_i^L q_L^k \right), \quad (6,94)$$

<sup>53)</sup> Wären die stationären Lösungen der KLEIN-GORDON-Gleichung ohne weiteres orthogonal, wie dies bei den Eigenfunktionen der SCHRÖDINGER-Gleichung der Fall ist, so wäre das betreffende räumliche Restintegral auch ohne zeitliche Mittelwertbildung gleich Null. – Zum Verschwinden der Mittelwerte zeitlicher Ableitungen siehe beispielsweise [24].

<sup>54)</sup> meines Wissens erstmalig

<sup>55)</sup> Angesichts der Tatsache, daß sich abgesehen von Stoßprozessen alle Himmelskörper – und nicht zuletzt unsere Erde – ständig im freien Fall befinden, könnte es etwas sonderbar anmuten, hier von einem Spezialfall zu sprechen.

wobei wiederum – analog zur oben erläuterten Vorgehensweise – ein Umsortieren der die Feldstärken enthaltenen Summanden der Form  $f_{im}^X \mathbf{f}_k^{Ym}$  mit anschließender Neugruppierung erforderlich ist.

Es ist klar, daß sich nach diesem Verfahren ganz allgemein eine unmittelbare Definition des *kanonischen* Energie-Impuls-Tensors dadurch ergibt, daß letzterer durch Ableitung einer jeweils vorgegebenen Wirkungs-dichte bei Verwendung der implizierten EULER-LAGRANGE'schen Gleichungen gerade dahingehend bestimmt wird, daß (4,1) identisch erfüllt wird. So läßt sich die Gleichung (6,94) sofort umschreiben in

$$\partial_k \sum_L \left( -f_{im}^{\bar{L}} f_L^{km} + \frac{1}{m_L} q_L^2 \tilde{s}_i^L \tilde{s}_L^k + \frac{\hbar^2}{m_L} q_i^L q_L^k + \delta_i^k \tilde{\Phi}_L \right) = 0. \quad (6,95)$$

Offensichtlich stellt die hier stehende Summe – deren Vierer-Divergenz entsprechend der Forderung (4,1) also verschwindet – einen lokalen Energie-Impuls-Tensor dar, der mit (6,86-87) tatsächlich in Einklang steht. Daß es sich aber bei der für den vorliegenden Fall nachgewiesenen Äquivalenz der beiden verschiedenen Ableitungen des Energie-Impuls-Tensors der Materie um mehr als eine bloße Selbstverständlichkeit handelt, wird in Anhang A deutlich werden, wo eine solche Äquivalenz zu fehlen scheint.

Für einige im weiteren Verlauf anzustellende Untersuchungen bietet es sich an, den Ausdruck (6,87) in drei bemerkenswert einfache charakteristische Bestandteile zu zerlegen gemäß

$$T_{ik}^L \equiv L_{ik}^L + M_{ik}^L + Q_{ik}^L. \quad (6,96)$$

Dabei tritt hier zunächst – als mikroskopisches Analogon zum herkömmlichen Ausdruck – der Energie-Impuls-Tensor *der elektromagnetischen Felder* auf, und zwar

$$L_{ik}^L \equiv -f_{im}^{\bar{L}} f_k^{Lm} + \frac{1}{4} \eta_{ik} f_{lm}^{\bar{L}} f_L^{lm}. \quad (6,97)$$

Der zweite Bestandteil entspricht, wie im folgenden etwas näher erläutert werden soll, einem Energie-Impuls-Tensor *der Strömung*, nämlich

$$M_{ik}^L \equiv \frac{1}{m_L} q_L^2 \tilde{s}_i^L \tilde{s}_k^L. \quad (6,98)$$

Den dritten Bestandteil schließlich möchte ich den Energie-Impuls-Spannungs-Tensor *der Gestalt* nennen. Mit seiner Form

$$Q_{ik}^L \equiv \frac{\hbar^2}{m_L} \left[ q_i^L q_k^L - \frac{1}{4} \eta_{ik} \partial_l^L (q_L^2) \right] \quad (6,99)$$

hat er zwar außerhalb der Quantenmechanik keine gängige makroskopische Entsprechung, tritt aber hier als denkbar einfachste Ergänzung der ansonsten unvollständigen konventionellen Elektrodynamik in Erscheinung. Wie in Abschnitt 7.5 gezeigt wird, sind es gerade diese Beiträge, welche – bislang unter der üblichen Voraussetzung fiktiver Punktteilchen – den ursprünglichen HEISENBERG'schen Unschärfen und damit auch der so genannten Nullpunktsenergie zugeordnet werden.

Es ist nun interessant, den Austausch von Energie und Impuls zwischen diesen einzelnen Bestandteilen durch Bildung der jeweiligen Vierer-Divergenz zu berechnen. Es ergibt sich

$$\partial_k L_{iL}^k = -f_{ik}^{\bar{L}} \tilde{j}_L^k + \frac{1}{4} \left( f_L^{km} \partial_i f_{km}^L - f_L^{km} \partial_i f_{km}^{\bar{L}} \right) \quad (6,100)$$

und 
$$\partial_k M_{iL}^k = \frac{1}{m_L} q_L^2 \tilde{s}_L^k \tilde{s}_{ki}^L \quad (6,101)$$

und 
$$\partial_k Q_{iL}^k = -\frac{1}{m_L} q_L^2 \tilde{s}_L^k \tilde{s}_{ik}^L. \quad (6,102)$$

Mit der Zusammenfassung der letzten beiden Resultate zu

$$\partial_k M_{iL}^k + \partial_k Q_{iL}^k = f_{ik}^{\bar{L}} \tilde{J}_L^k \quad (6,103)$$

folgt

$$\partial_k T_{iL}^k = \frac{1}{4} \left( f_{\bar{L}}^{km} \partial_i f_{km}^L - f_L^{km} \partial_i f_{km}^{\bar{L}} \right). \quad (6,104)$$

Bei ursprünglicher Sortierung – die nach wie vor durch den Teilchenindex K gekennzeichnet ist – stellt sich das mikroskopische Analogon zum herkömmlichen Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes anders dar als in (6,97). Die entsprechende Form läßt sich unmittelbar aus (6,84) ablesen und wird in Abschnitt 8.2 explizit benutzt werden. Eine analoge Rechnung wie die soeben angestellte führt anstelle von (6,104) zu einem zwar anders aussehenden, dennoch aber gleichwertigen Zwischenergebnis vor Summierung über alle Teilchen, nämlich

$$\partial_k T_{iK}^k = \frac{1}{2} \left( f_{im}^{\bar{K}} \tilde{J}_K^m - f_{im}^K \tilde{J}_{\bar{K}}^m \right). \quad (6,105)$$

Nicht die Vierer-Divergenz des einzelnen Summanden  $\partial_k T_{iL}^k$  oder  $\partial_k T_{iK}^k$  verschwindet also. Erst die Summenbildung über den Index L oder K führt schließlich zur Erfüllung der differentiellen Erhaltungssätze (4,1) für Energie und Impuls des gesamten Systems. – Mit einem Blick auf (6,104) oder auch (6,105) läßt sich dies sofort weiter präzisieren, und es wird außerdem am Beispiel des H-Atoms in Abschnitt 7.1 explizit verifiziert:

*Die Teilsumme über jedes Paar von Summanden, die durch bloßes Vertauschen der einzelnen Teilchenindizes auseinander hervorgehen, genügt den Erhaltungssätzen (4,1) bzw. (6,75).*

Abschließend sei der Energie-Impuls-Tensor der ponderablen Materie (6,86-87) – dieser schließt, wie bereits erwähnt, die Beiträge aller Felder mit Ausnahme des Gravitationsfeldes ein – teilweise in der dem Abschnitt 6.3.c entsprechenden komplexen Form angegeben, die zwar zunächst weniger durchsichtig scheint, dafür aber sowohl aus Sicht der historischen Entwicklung als auch unter mathematisch formalen Aspekten naheliegt. Das Resultat läßt sich wiederum mittels der Substitutionen (6,37), (6,38) auf verschiedene Weise – z.B. auch direkt aus (6,96-99) – berechnen. Der Ansatz

$$T_{ik}^L \equiv L_{ik}^L + T_{ik}^{\psi L} \quad (6,106)$$

entspricht der Aufteilung in einen die freien elektromagnetischen Felder repräsentierenden Anteil einerseits sowie einen die materiellen Teilchen – auch im Sinne des phänomenologischen Energie-Impuls-Tensors (5,2) – repräsentierenden Anteil andererseits. Doch wird sich in Abschnitt 7.4 zeigen, daß die formale Zusammenfassung des Energie-Impuls-Tensors<sup>56)</sup> der Gestaltfunktion (6,99) mit dem Energie-Impuls-Tensor der Strömung (6,98) auch zu Mißverständnissen führen kann. – Hier nun ergibt sich

$$T_{ik}^{\psi L} = -2 \frac{\partial \Phi_L^{\psi}}{\partial g^{ik}} + g_{ik} \Phi_L^{\psi}. \quad (6,107)$$

Dabei ist der erste Term der rechten Seite gleich

$$-\frac{1}{2m_L} \left[ \left( i\hbar \psi_i^L - \frac{e_L}{c} a_i^{\bar{L}} \psi_L \right) \left( i\hbar \psi_k^{*L} + \frac{e_L}{c} a_k^{\bar{L}} \psi_L^* \right) + \left( i\hbar \psi_k^L - \frac{e_L}{c} a_k^{\bar{L}} \psi_L \right) \left( i\hbar \psi_i^{*L} + \frac{e_L}{c} a_i^{\bar{L}} \psi_L^* \right) \right] \quad (6,108)$$

und der zweite stellt sich im Einklang mit (6,88) – wo K durch L ersetzt werden darf – einfach dar als

$$g_{ik}^{\psi} \Phi_{L(Lösung)} = -\frac{\hbar^2}{4m_L} g_{ik} \left( |\psi_L|^2 \right)_{;l}^l, \quad (6,109)$$

<sup>56)</sup> Es sollte eher die allerdings umständliche Bezeichnung Energie-Impuls-Spannungs-Tensors verwendet werden, wobei die Betonung gerade im vorliegenden Fall auf dem dritten der kombinierten Begriffe zu liegen hätte.

sodaß der Tensoranteil (6,107) als Summe von (6,108) und (6,109) resultiert. Angesichts der damit gegebenen komplexen Darstellung springt die bisher in korrespondenzmäßiger Anlehnung an die konventionelle HAMILTON-JACOBI-Gleichung axiomatisch vorgegebene formale Operatorenbeziehung

$$p^k \rightarrow i\hbar \partial^k - \frac{e_0}{c} A^k \quad (6,110)$$

geradezu ins Auge. Diese folgt hier als Näherung aus dem dahinterstehenden konsistenten Energie-Impuls-Tensor (6,84-85) gewissermaßen von selbst. Denn es ist zu beachten, daß das Integral über (6,109) im frei fallenden System nur einen kleinen Beitrag  $\int \partial_{ii}^2 |\psi_L|^2 dV$  ergibt, der bei dem Superpositionsansatz

$$\psi_L \equiv \sum_V \psi_{LV} \quad (6,111)$$

mit  $\psi_{LV}$  entsprechend (6,56) wegen der – allerdings nur im Falle der SCHRÖDINGER-Gleichung für die  $R_{KV}$  exakt gültigen – Orthogonalitätsrelationen gegenüber den relevanten Beiträgen von (6,108) in erster Ordnung vernachlässigbar ist. Dieses Konzept der Zuordnung von Operatoren zu mechanischen Größen wird in Abschnitt 7.4 noch etwas näher beleuchtet.

Der somit in verschiedenen Formen abgeleitete konsistente Energie-Impuls-Tensor der ponderablen Materie (6,86-87) bzw. (6,84-85) oder nun auch sein Anteil (6,107-109) gilt nach Voraussetzung zwar nur bei Vernachlässigung von Spineffekten, auf die erst im Anhang kurz eingegangen werden soll. Doch bleibt festzuhalten, daß in diesem Energie-Impuls-Tensor der Materie sowohl dessen von EINSTEIN verwendetes phänomenologisches Gegenstück als auch der Energie-Impuls-Tensor der konventionellen Elektrodynamik – in beiden Fällen mitsamt den jeweils dazugehörigen Bewegungsgleichungen – erstmalig als makroskopische Näherungen enthalten sind.

## 7. Neue Aspekte der Quantenmechanik

Nachdem im vorausgegangenen Abschnitt die Grundgleichungen einer offenen einheitlichen Theorie von Elektrodynamik, Gravitation und Quantenmechanik bei Vernachlässigung von Spineffekten aus einem konsistenten Variationsprinzip abgeleitet worden sind, sei nun an unterschiedlichen Problemen überprüft, ob und inwieweit sich diese im Rahmen der hier entwickelten Vorstellungen lösen und – zumindest ansatzweise – *verstehen* lassen. Es werden dabei gewisse Aspekte einer im Hinblick auf die physikalischen Grundlagen konkreten Quantenmechanik zutage treten, die der bisherigen Interpretation gegenüberzustellen sind. Angesichts des hochentwickelten mathematischen Apparats der historisch gewachsenen, weit verzweigten und seit langem in voller Blüte stehenden Theorie aber liegt es auf der Hand, daß sich bei weitem nicht alle im Zusammenhang mit dem hier vorgelegten deduktiven Konzept entstehenden Fragen auf Anhieb formulieren, oder gar abschließend beantworten lassen.

Es wäre andererseits seltsam, wenn eine aus einem konsistenten Variationsprinzip wie (6,1-3) hervorgehende, daraus gewissermaßen noch einmal sich neu entwickelnde Quantenmechanik in Widerspruch zur physikalischen Wirklichkeit stünde, obwohl – wie die vorausgegangenen Abschnitte gezeigt haben – ihre Grundgleichungen mit denen der herkömmlichen Theorie weitgehend identisch sind<sup>57)</sup>. Besonders die Tatsache, daß der obige Ansatz nun zum ersten Mal eine nachvollziehbare Erklärung für die PLANCK'sche Energie-Frequenz-Beziehung liefert, spricht für die Tragfähigkeit des hier skizzierten Konzepts. Gerade diese fundamentale Energie-Frequenz-Beziehung hat ja bekanntlich EINSTEIN zum Begriff des Photons geführt, BOHR die Entwicklung seines Atommodells ermöglicht, DEBROGLIE [37] zu seinen Materiewellen inspiriert und letztlich für HEISENBERG als vermeintlich irreduzible Grundlage seiner ursprünglichen Quantenmechanik gedient. Allerdings hat SCHRÖDINGER starke Argumente für eine andere Auffassung vorgebracht, die im folgenden eine Rolle spielen.

---

<sup>57)</sup> Unter gerade auch in der Physik nicht selten herangezogenen ästhetischen Aspekten scheint mir das hier zugrundegelegte Variationsprinzip angesichts der daraus fließenden Gleichungen in seiner durchgängigen Konsistenz einfach zu schön, um – innerhalb seines durch die Voraussetzungen definierten Geltungsbereichs – falsch zu sein.

Eine nähere Betrachtung der bereits in Abschnitt 6.3.c definierten stationären Zustände genügt, um sich – bei einstweiliger Vernachlässigung von Spineffekten<sup>58)</sup> – einen Überblick über fundamentale Zusammenhänge zu verschaffen. Dabei werden auch einige Grundzüge der ursprünglich nicht-relativistischen Quantenmechanik in neuem Licht erscheinen, was deshalb von Interesse ist, weil gerade dort seinerzeit die unausweichlich scheinende ‚revolutionäre‘ Abkehr von der klassischen<sup>59)</sup> Physik vollzogen wurde.

### 7.1 Identifikation des Stationaritäts-Parameters $\varepsilon$ mit der Elektronenenergie beim H-Atom

Bis auf die Fein- bzw. Hyperfeinstruktur der Spektrallinien, für deren präzise Erklärung die Eigendrehimpulse der beteiligten Teilchen zu berücksichtigen sind, lassen sich mit Hilfe der KLEIN-GORDON-Gleichung die elektromagnetischen Verhältnisse im H-Atom allein durch Vorgabe des von einem fiktiven ruhenden Proton aufgebauten idealisierten COULOMB-Potentials ermitteln.

Dies soll versuchsweise dadurch geschehen, daß zunächst die Möglichkeiten einer stationären Ladungsverteilung des Elektrons bestimmt werden, aus denen sich dann *nachträglich* dessen jeweils dazugehöriges elektromagnetisches Feld rekonstruieren läßt. Daraufhin wird hier die KLEIN-GORDON-Gleichung des Protons im Feld des Elektrons gelöst, was eine auf kleinem Raum ausgedehnte Ladungsverteilung dieses Protons und damit auch Korrekturen zum ursprünglich vorausgesetzten COULOMB-Potential einer Punktladung mit sich bringen wird. Es scheint naheliegend, das Verfahren so lange fortzusetzen, bis sich in hinreichender Näherung konsistente Felder von Elektron und Proton ergeben. Diese sollten schließlich ein Bild des H-Atoms im Grundzustand ergeben, bei dem sich die Ladungsverteilungen von Elektron und Proton in vollkommener Ruhe bezüglich des beiden gemeinsamen Schwerpunkts befänden. Es wird sich jedoch zeigen, daß dieses Bild aufgrund derjenigen durch die Erfahrung bestätigten Korrekturen nicht exakt zutreffen kann, die unter dem Stichwort ‚Mitbewegung des Kerns‘ anzubringen sind. Eine Begründung wird vorgeschlagen.

Es ist an sich sehr einfach, den lokalen Energie-Impuls-Tensors eines Systems zweier entgegengesetzt geladener Teilchen bei Vernachlässigung der übrigen Objekte aufzustellen. Dazu soll der in einem frei fallenden lokalen Inertialsystem geltende Ausdruck

$$T_{i(H)}^k = T_{i(e,p)}^k + T_{i(p,e)}^k \quad (7,1)$$

zunächst explizit ausgeschrieben werden. Der gemischte Energie-Impuls-Tensor eines wasserstoffähnlichen Atoms (H) ergibt sich mit (6,20) nach Heraufziehen des Viererindex  $k$  aus (6,86-87). Dabei wird für den Teilchenindex  $L$  einerseits ‚e‘ (elektronenähnlich, aber spinfrei) und andererseits ‚p‘ (protonenähnlich, aber spinfrei) gesetzt, was umgekehrt für den Index  $\bar{L}$  (Nicht-L) zuerst ‚p‘ und dann ‚e‘ bedeutet. Im Folgenden soll trotz dieser Vernachlässigung von Spineffekten kurz von ‚Elektron‘ und ‚Proton‘ die Rede sein. Aufgrund des Äquivalenzprinzips gilt hier die spezielle Relativitätstheorie mit dem lokalen Fundamentaltensor  $g_{ik}^{\text{lokal}} := \eta_{ik}$  und  $\sqrt{g} := 1$ , wodurch in diesem gesamten Abschnitt 7 die ursprünglich auftretenden (fettgedruckten) Tensordichten einfach in entsprechende Tensoren übergehen. Sämtliche Wechselwirkungen mit anderen – hinreichend weit entfernten – Teilchen sowie auch die Gravitation zwischen Elektron und Proton selbst werden vernachlässigt. Die in (7,1) auftretenden beiden Bestandteile lauten dann explizit

$$\begin{aligned} T_{i(e,p)}^k &= -f_{il}^p f_e^{kl} + \frac{1}{m_e} q_e^2 \left( s_i^e + \frac{e_e}{c} a_i^p \right) \left( s_e^k + \frac{e_e}{c} a_p^k \right) + \frac{\hbar^2}{m_e} q_i^e q_e^k + \frac{1}{4} \delta_i^k \left[ f_e^{lm} f_{lm}^p - \frac{\hbar^2}{m_e} \partial_l^l q_e^2 \right], \\ T_{i(p,e)}^k &= -f_{il}^e f_p^{kl} + \frac{1}{m_p} q_p^2 \left( s_i^p + \frac{e_p}{c} a_i^e \right) \left( s_p^k + \frac{e_p}{c} a_e^k \right) + \frac{\hbar^2}{m_p} q_i^p q_p^k + \frac{1}{4} \delta_i^k \left[ f_p^{lm} f_{lm}^e - \frac{\hbar^2}{m_p} \partial_l^l q_p^2 \right]. \end{aligned} \quad (7,2)$$

<sup>58)</sup> Allerdings beruht das PAULI-Prinzip letztlich auf Spineffekten, die demzufolge bei der Betrachtung von Atomen mit *mehr* als einem Elektron nicht vernachlässigt werden können, ohne das gesamte Bild auch *wesentlich* zu beeinträchtigen.

<sup>59)</sup> Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei ausdrücklich angemerkt, daß eine Abkehr von all denjenigen falschen Vorstellungen natürlich unvermeidlich war, die damals *unberechtigterweise* – neben vielen wertvollen und bis heute gültigen Konzepten – die Bezeichnung ‚klassisch‘ für sich in Anspruch nahmen.

Es ist klar, daß diese – ebenso wie andere Ausdrücke bei der Behandlung des H-Atoms – durch bloßes Vertauschen der Indizes ,e‘ und ,p‘ ineinander übergehen.

Für den Energie-Impuls-Tensor (7,1-2), bei dem es sich aufgrund seiner Herleitung also um eine Spezialisierung des detaillierten Energie-Impuls-Tensors (6,86-87) der allgemeinen Relativitätstheorie handelt, sollen gemäß (4,1) die Erhaltungssätze

$$\partial_k T_{i(H)}^k = 0 \quad (7,3)$$

gelten, die damit dem fundamentalen Energie-Impuls-Postulat Rechnung tragen. Diese Forderung wird entsprechend den Ausführungen des Abschnitts 6.5 hier noch einmal dadurch verifiziert, daß für die aus (6,1-3) unter Weglassung aller Beiträge anderer Teilchen entnommene materielle Wirkungsichte des H-Atoms

$$\hat{\Phi}_{(H)} = \hat{\Phi}_{(e,p)} + \hat{\Phi}_{(p,e)} \quad (7,4)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{(e,p)} &\equiv \frac{1}{4} f_e^{lm} f_{lm}^p - \frac{1}{2m_e} q_e^2 \left( s_e^l + \frac{e_e}{c} a_p^l \right) \left( s_l^e + \frac{e_e}{c} a_l^p \right) + \frac{1}{2} m_e c^2 q_e^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} q_e^l q_l^e, \\ \hat{\Phi}_{(p,e)} &\equiv \frac{1}{4} f_p^{lm} f_{lm}^e - \frac{1}{2m_p} q_p^2 \left( s_p^l + \frac{e_p}{c} a_e^l \right) \left( s_l^p + \frac{e_p}{c} a_l^e \right) + \frac{1}{2} m_p c^2 q_p^2 - \frac{\hbar^2}{2m_p} q_p^l q_l^p \end{aligned} \quad (7,5)$$

direkt die Änderungen  $\partial_i \hat{\Phi}_{(H)}$  berechnet werden. Bei Rückgriff auf die in Abschnitt 6 abgeleiteten Grundgleichungen und Verwendung der Abkürzungen

$$\tilde{a}_i^{p/e} \equiv a_i^{p/e} + \frac{c}{e_{e/p}} s_i^{e/p} \quad (7,6)$$

ergibt eine einfache Umformung

$$\partial_i \hat{\Phi}_{(H)} = \partial_k \left( f_{il}^p f_e^{kl} + \tilde{a}_i^p \tilde{j}_e^k - \frac{\hbar^2}{m_e} q_i^e q_e^k \right) + \partial_k \left( f_{il}^e f_p^{kl} + \tilde{a}_i^e \tilde{j}_p^k - \frac{\hbar^2}{m_p} q_i^p q_p^k \right). \quad (7,7)$$

Der gewünschte Nachweis ist hiermit bereits geführt. Denn Gleichung (7,7) läßt sich zur vollständigen Übereinstimmung mit (7,3) ohne weiteres umschreiben in

$$\partial_k \left\{ \left[ \delta_i^k \hat{\Phi}_{(e,p)} - \left( f_{il}^p f_e^{kl} + \tilde{a}_i^p \tilde{j}_e^k - \frac{\hbar^2}{m_e} q_i^e q_e^k \right) \right] + \left[ \delta_i^k \hat{\Phi}_{(p,e)} - \left( f_{il}^e f_p^{kl} + \tilde{a}_i^e \tilde{j}_p^k - \frac{\hbar^2}{m_p} q_i^p q_p^k \right) \right] \right\} = 0, \quad (7,8)$$

wobei der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck bei entsprechender Umsetzung von (6,88) mit dem Energie-Impuls-Tensor (7,1-2) identisch ist.

Wenn nun zur Bestimmung der in Abschnitt 6.3.c allgemein definierten stationären Zustände die Viererpotentiale von Proton und Elektron<sup>60)</sup> des H-Atoms zeitunabhängig in der Form

$$\begin{aligned} a_p^l &\approx [\varphi_p(\vec{r}), \vec{0}], \\ a_e^l &\approx [\varphi_e(\vec{r}), \vec{a}_e(\vec{r})] \end{aligned} \quad (7,9)$$

angesetzt werden, dann stellt das bereits eine Idealisierung dar, weil ein solcher Ansatz offensichtlich einen fiktiven, bezüglich des Schwerpunktsystems ortsfesten Atomkern impliziert. Diese Idealisierung kann vorläufig als eine brauchbare Näherung dienen, weil die Masse des Protons sehr viel größer ist als die des Elektrons.

Für die Energiedichte eines in einem stationären Zustand befindlichen frei fallenden H-Atoms folgt aus dem Energie-Impuls-Tensor (7,1-2) bei Berücksichtigung der in (6,50), (6,51) definierten Voraussetzungen zunächst

<sup>60)</sup> Die mit dem Spin dieser Teilchen verbundenen Eigendrehimpulse sowie ihre magnetischen und elektrischen Dipolmomente werden hier nach Voraussetzung vernachlässigt (s. jedoch Anhang A).

$$T_{0(H)}^{0(\text{stationär})} = T_{0(e,p)}^{0(\text{stationär})} + T_{0(p,e)}^{0(\text{stationär})} \quad (7,10)$$

mit

$$\begin{aligned} T_{0(e,p)}^{0(\text{stationär})} &= \left( -f_{0l}^p f_e^{0l} + \frac{1}{4} f_e^{lm} f_{lm}^p \right) + \frac{1}{m_e c^2} q_e^2 (\varepsilon_e - e_e \varphi_p)^2 + \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{m_e} \Delta(q_e^2), \\ T_{0(p,e)}^{0(\text{stationär})} &= \left( -f_{0l}^e f_p^{0l} + \frac{1}{4} f_p^{lm} f_{lm}^e \right) + \frac{1}{m_p c^2} q_p^2 (\varepsilon_p - e_p \varphi_e)^2 + \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{m_p} \Delta(q_p^2). \end{aligned} \quad (7,11)$$

Obwohl sich  $T_{0(p,e)}^0$  und  $T_{0(e,p)}^0$  formal, wie erwähnt, durch bloßes Vertauschen der Indizes ,e‘ und ,p‘ auseinander ergeben, sind beide Ausdrücke zur Verdeutlichung des wechselseitigen Zusammenhangs explizit ausgeschrieben. Mit Verwendung der Beziehungen (6,7) und (6,53) folgt bei Beachtung des Ansatzes (7,9) schließlich

$$\begin{aligned} T_{0(e,p)}^{0(\text{stationär})} &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_e \vec{\nabla} \varphi_p + \frac{\tilde{\rho}_e}{e_e} (\varepsilon_e - e_e \varphi_p) + \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{m_e} \Delta(q_e^2), \\ T_{0(p,e)}^{0(\text{stationär})} &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_e \vec{\nabla} \varphi_p + \frac{\tilde{\rho}_p}{e_p} (\varepsilon_p - e_p \varphi_e) + \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{m_p} \Delta(q_p^2). \end{aligned} \quad (7,12)$$

Die stationäre Gesamtenergie des H-Atoms läßt sich nach partieller Integration und mit Rücksicht auf die wegen der obigen Voraussetzungen hier exakt zutreffenden Beziehung  $\Delta \varphi_e = -\tilde{\rho}_e$  schreiben als

$$W_{(H)}^{(\text{stationär})} \equiv \int T_{0(H)}^{0(\text{stationär})} dV = \varepsilon_e \int \frac{\tilde{\rho}_e}{e_e} dV + \int \left[ \frac{\tilde{\rho}_p}{e_p} (\varepsilon_p - e_p \varphi_e) \right] dV. \quad (7,13)$$

Für die Bestimmung des ersten rechts stehenden Integrals aber spielt nun die in 6.3.b zugrundegelegte Normierungsbedingung (6,34) eine entscheidende Rolle. Denn wegen  $\int \tilde{\rho}_e dV = e_e$  hat dieses den Wert 1. Analog dazu läßt sich aus dem zweiten Integral mit  $\varepsilon_p \equiv m_p c^2 + E_p$  die Ruheenergie des Protons herausziehen und es folgt

$$W_{(H)}^{(\text{stationär})} = \varepsilon_e + m_p c^2 + \int \frac{\tilde{\rho}_p}{e_p} (E_p - e_p \varphi_e) dV. \quad (7,14)$$

In Abschnitt 7.6 wird später am Beispiel des Grundzustands explizit nachgewiesen, daß das auf der rechten Seite verbleibende Integral unter den zu Anfang dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen verschwindet, sodaß schließlich einfach resultiert

$$W_{(H)}^{(\text{stationär})} = \varepsilon_e + m_p c^2. \quad (7,15)$$

Dementsprechend ist hier also – zunächst am Beispiel des H-Atoms – der in den stationären Lösungen der KLEIN-GORDON-Gleichung auftretende und in (6,51) definierte, bisher aber mysteriös gebliebene Stationaritäts-Parameter  $\varepsilon_e$  erstmalig durch direkte Berechnung des konsistenten Energie-Impuls-Tensors als relativistische Energie des gebundenen Elektrons nachgewiesen.

Bei dieser Berechnung hat sich gezeigt, daß die im Hinblick auf die Existenz einer Elementarladung ohnehin zwingende – doch vom üblichen Gebrauch abweichende – Normierung gar nicht anders gewählt werden kann, ohne das bemerkenswert einfache Ergebnis (7,15) zu verfälschen, das die fundamentale Energie-Frequenz-Beziehung impliziert, wie in Abschnitt 7.3 endgültig gezeigt werden soll.

Der grundsätzlich einleuchtenden Tatsache aber, daß das Proton des H-Atoms mitsamt seinem Feld – insbesondere bei Übergängen zwischen stationären Zuständen mit unterschiedlichen Bahndrehimpulsen – realistisch nicht als ortsfest angesetzt werden darf, läßt sich nach bewährten Prinzipien der klassischen Physik durch Verwendung der reduzierten Masse *in der SCHRÖDINGER-Gleichung*<sup>61)</sup> des Elektrons schließlich bemerkenswert einfach Rechnung tragen.

<sup>61)</sup> Es ist unverzichtbar, eine entsprechende Korrektur auch in den entsprechenden Resultaten der KLEIN-GORDON-Gleichung oder auch der DIRAC-Gleichung vorzunehmen. Eine *durchgängige* Verwendung der reduzierten Masse aber würde

## 7.2 Geladene Teilchen im quellenfreien Bereich elektromagnetischer Felder

Das wichtige Modell des geladenen Teilchens im quellenfreien Bereich eines vorgegebenen – aus vielen Einzelkomponenten zusammengesetzten – elektromagnetischen Feldes läßt sich *näherungsweise* sehr einfach behandeln. Der Index eines speziell herausgegriffenen Teilchens sei beispielsweise A. Dann werden nach Setzung  $q_B, q_C \dots = 0$  lediglich diejenigen der verbleibenden Terme in den Summen der Wirkungsdichte  $\hat{\Phi}$  und des Energie-Impuls-Tensors  $T_i^k$  beibehalten, in denen der Index A auftritt. Alle anderen Terme werden vernachlässigt, d.h. auch alle entsprechenden Wechselwirkungsprozesse in der Umgebung des Teilchens.

Dieses Verfahren läuft nach einem formalen Übergang zur Vereinfachung der Schreibweise schließlich darauf hinaus, daß in den Grundgleichungen (6,19), (6,27) und (6,33) der Index K einfach weggelassen wird, wohingegen bei Weglassen des Index  $\bar{K}$  in dem betreffenden Symbol von der Kleinschreibung zur Großschreibung übergegangen wird. Demzufolge repräsentieren großgeschriebene Größen jeweils eine Summenbildung über alle anderen Teilchen außer K, was bei zusätzlicher statistischer Glättung etwa im Sinne einer makroskopischen Zusammenfassung verstanden werden mag. So entstehen die in lokalen Inertialsystemen gültigen Gleichungen

$$\partial_k f^{kl} = -\frac{e_0}{m_0 c} q^2 \left( s^l + \frac{e_0}{c} A^l \right) \equiv \tilde{j}^l \quad (7,16)$$

und

$$-\hbar^2 \square q = q \left[ \left( s^l + \frac{e_0}{c} A^l \right) \left( s_l + \frac{e_0}{c} A_l \right) - m_0^2 c^2 \right] \quad (7,17)$$

sowie

$$\partial_l \tilde{j}^l = 0. \quad (7,18)$$

In der ebenfalls heranzuziehenden Gleichung (6,11) ist mit dem dort verwendeten allgemeinen Teilchenindex  $\mathcal{N}$  entsprechend zu verfahren, je nachdem ob im Einzelfall  $\mathcal{N}$  für K oder  $\bar{K}$  stehen soll. Es gilt also

$$f_{ik;l} + f_{kl;i} + f_{li;k} \equiv 0 \quad \wedge \quad F_{ik;l} + F_{kl;i} + F_{li;k} \equiv 0. \quad (7,19)$$

Bei Verzicht auf statistische Glättung hätten die bisher lediglich in Abänderung der Bezeichnungen neu geschriebenen Grundgleichungen im Vergleich mit den ursprünglichen nach wie vor uneingeschränkte Gültigkeit. Wird nun aber entsprechend der oben erläuterten Vorgehensweise die Summe (6,85) unter Vernachlässigung der Wechselwirkungen zwischen den anderen Teilchen nur teilweise gebildet, so ergibt sich für den Energie-Impuls-Tensor des herausgegriffenen Teilchens in analoger Schreibweise

$$\tau_i^k = \left[ -\left( F_{il} f^{kl} + F^{kl} f_{il} \right) + \frac{1}{2} \delta_i^k F_{lm} f^{lm} \right] + \frac{1}{m_0} q^2 \tilde{s}_i \tilde{s}^k + \frac{\hbar^2}{m_0} \left[ q_i q^k - \frac{1}{4} \delta_i^k \partial_l (q^2) \right]. \quad (7,20)$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von  $T_{iK}^k$  gemäß (6,84), (6,88) außer in der Schreibweise nun wesentlich dadurch, daß der die elektromagnetischen Felder repräsentierende Anteil hier – wie auch in der entsprechend modifizierten Wirkungsdichte  $\hat{\Phi}$  – insgesamt mit *doppeltem* Faktor auftritt. Der Anteil von (6,84) wäre bei einer expliziten Aufsummierung für  $K = A, B, C \dots$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left[ \left( f_{im}^B + f_{im}^C + \dots \right) f_A^{km} + \left( f_B^{km} + f_C^{km} + \dots \right) f_{im}^A \right] + \frac{1}{4} \delta_i^k f_A^{lm} \left( f_{lm}^B + f_{lm}^C + \dots \right) \\ & -\frac{1}{2} \left[ \left( f_{im}^A + 0 \right) f_B^{km} + \left( f_A^{km} + 0 \right) f_{im}^B \right] + \frac{1}{4} \delta_i^k f_B^{lm} \left( f_{lm}^A + 0 \right) \\ & -\frac{1}{2} \left[ \left( f_{im}^A + 0 \right) f_C^{km} + \left( f_A^{km} + 0 \right) f_{im}^C \right] + \frac{1}{4} \delta_i^k f_C^{lm} \left( f_{lm}^A + 0 \right) - \dots, \end{aligned} \quad (7,21)$$

---

dort nicht zu einem sinnvollen Ergebnis führen; denn ein Blick auf (7,67) zeigt, daß davon auch die Ruheenergie des Elektrons selbst betroffen wäre, was sicher nicht richtig ist.

wobei der Index  $A$  vorübergehend noch einmal das hier herausgegriffene Teilchen markieren soll, und ein ausgeschriebenener Summand  $+0$  die jeweils zu vernachlässigenden Terme symbolisiert, welche in ausmultiplizierter Form kein den Index  $A$  enthaltendes Produkt ergeben. Mit Berücksichtigung der zuvor eingeführten Abkürzungen läßt sich aus dieser Summe (7,21) nun der in den ersten eckigen Klammern von (7,20) stehende Term ohne weiteres ablesen.

Die Berechnung der Vierer-Divergenz des auf diese Weise gebildeten Energie-Impuls-Tensors  $\tau_i^k$  eines einzelnen Teilchens führt nun zu dem Ergebnis

$$\partial_k \tau_i^k = -f_{ik} J^k. \quad (7,22)$$

Dies bedeutet nichts anderes, als daß für Energie und Impuls des einzelnen Teilchens mitsamt den die Wechselwirkung repräsentierenden Feldern überall dort – im Einklang mit der Forderung (4,1) – Erhaltungssätze gelten, wo die zusammengefaßte Viererstromdichte aller übrigen Teilchen gemäß

$$\partial_k F^{kl} \equiv J^l = 0 \quad (7,23)$$

verschwindet. Das aber trifft in sehr guter Näherung immer dann zu, wenn sich das speziell herausgegriffene Teilchen – bei hinreichend rasch mit der Entfernung abfallender Dichte von Masse und Ladung – gewissermaßen als Ganzes in einem quellenfreien Bereich vorgegebener Felder<sup>62)</sup> befindet. Genaugenommen ist die Erfüllung der Erhaltungssätze (4,1) aber immer exakt gewährleistet, und zwar grundsätzlich für alle Paare von Teilchen, wie in Abschnitt 6.5 gezeigt worden ist.

In der hier behandelten Näherung sind die Randbedingungen zu beachten, die sich daraus ergeben, daß die Voraussetzung (7,23) jeweils nur in einem *endlichen* Raumbereich erfüllt sein kann, und zwar mit einer Ladungsverteilung  $J_{\text{Rand}}^k \neq 0$  auf der Begrenzung. Denn offenbar muß die Gesamtladung aller Quellen des äußeren elektromagnetischen Feldes, in dem sich ein geladenes Teilchen befindet, derjenigen des Teilchens immer entgegengesetzt gleich sein, wenn die Summe aller Ladungen Null sein soll.

Die somit erhaltenen Gleichungen lassen sich in einer weitergehenden Näherung dank ihrer Linearität auch auf Gruppen von Teilchen ausdehnen, wenn nämlich deren Wechselwirkung untereinander ebenfalls vernachlässigt werden kann. In diesem Fall beziehen sich alle hier kleingeschriebenen Symbole auf die Gruppe der zu untersuchenden Teilchen, während andererseits großgeschriebene Symbole wieder Zusammenfassungen bezüglich der übrigen Teilchen bezeichnen.

Diese Ausdehnung des Verfahrens ist deshalb möglich, weil es im Hinblick auf die Erstellung eines konsistenten Energie-Impuls-Tensors, der den Erhaltungsgleichungen (4,1) genügt, nicht unbedingt notwendig ist, den im Variationsprinzip auftretenden Ladungs-Parametern  $e_K$  ausschließlich die Werte  $\pm e$  zuzuschreiben. Die Symbole  $e_K$  und  $m_K$  lassen sich gegebenenfalls z. B. auch als Ladung und Masse  $\pm Ze$  eines beliebigen Atomkerns, eines Ions oder selbst eines frei beweglichen makroskopischen geladenen Körpers verstehen. Für ein Teilchen – oder eine Gruppe untereinander hinreichend schwach wechselwirkender Teilchen – das sich in einem zeitunabhängigen elektromagnetischen Potential der Form

$$A^l = [\phi(r), \vec{A}(r)] \quad (7,24)$$

befindet, ergibt sich als Energiedichte eines durch (6,50-51) definierten stationären Zustands gemäß (7,20) nunmehr

$$\tau_0^{0(\text{stationär})} = \vec{\nabla}\phi \vec{\nabla}\phi + (\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{\vec{p}}{e_0}(\epsilon - e_0\phi) + \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{m_0} \Delta(\phi^2), \quad (7,25)$$

wobei hier  $\phi$  das Potential des einzelnen Teilchens und  $\phi$  das des vorgegebenen ‚äußeren‘ Feldes bedeutet. Nach Integration bzw. partieller Umformung folgt

---

<sup>62)</sup> Bei diesen handelt es sich in der Regel um äußere Felder. Doch sind die Darstellungen dieses Abschnitts z.B. näherungsweise auch auf das Elektron im Wasserstoffatoms anwendbar, wobei das in diesem Fall vorgegebene Feld des Protons im Hinblick auf die Ladungsverteilung des Elektrons eher als ein *inneres* zu bezeichnen wäre.

$$W_{(\text{Vakuum})}^{\text{stationär}} = \varepsilon \int \frac{\tilde{\rho}}{e_0} dV + \oint \vec{a} \times \vec{B} d\vec{\Sigma} + \frac{1}{c} \int \tilde{J} \vec{a} dV. \quad (7,26)$$

Wie deutlich zu sehen, braucht die dem Teilchen zuzuschreibende mikroskopische elektrische Feldstärke  $\vec{e}$  überhaupt nicht bekannt zu sein, um dessen Energie zu finden. Der Grund liegt darin, daß sich bei der partiellen Integration der Beitrag  $\tilde{\rho}\phi$  gerade gegen  $\vec{e}\vec{E}$  weggehoben hat. Zur Bestimmung des ersten rechter Hand auftretenden Integrals spielt die in Abschnitt 6.3.b abgeleitete Normierungsbedingung (6,34) auch hier eine entscheidende Rolle. Wegen  $\int \tilde{\rho}_e dV = e_e$  folgt nämlich, daß dieses wieder den Wert 1 hat. Da nun aber nach der für diesen gesamten Abschnitt 7.2 zugrundegelegten Voraussetzung (7,23) die Viererstromdichte  $J^k$  verschwindet – was außerdem die Homogenität eines stationären Magnetfelds  $\vec{B}$  impliziert – entsteht als Endresultat schließlich der einfache Ausdruck

$$W_{(\text{Vakuum})}^{\text{stationär}} = \varepsilon + \oint \vec{a} \times \vec{B} d\vec{\Sigma}. \quad (7,27)$$

Damit ist für den Fall, daß es sich bei dem vorgegebenen Potential mit  $\vec{A} = 0$  um ein rein elektrostatisches handelt, durch Berechnung der hier zugrundegelegten Näherung des konsistenten Energie-Impuls-Tensors (7,20) das wichtige Ergebnis (7,15) noch einmal auf andere Weise bestätigt: der in den stationären Lösungen der KLEIN-GORDON-Gleichung auftretende Stationaritäts-Parameter  $\varepsilon$  ist als relativistische Energie eines geladenen Teilchens im elektrischen Feld verifiziert. Dies läßt sich auch auf das im vorausgegangenen Abschnitt behandelte H-Atom zurückübertragen, weil im Sinne der obigen Voraussetzungen außerhalb des in den Schwerpunkt des Protons gelegten Koordinatenursprungs – der sich aus dem Bereich des Elektrons gewissermaßen ohne Verlust herauschneiden läßt – nach Voraussetzung überall  $\text{div } \vec{E}_p = 0$  gilt.

Bei Verzicht auf die Voraussetzung der Stationarität, doch unter Beibehaltung der Quellenfreiheit vorgegebener Felder im Bereich des untersuchten Teilchens, wäre das (7,27) entsprechende Ergebnis

$$\int \tau_0^0 dV \equiv W_{(\text{Vakuum})} = -\int \frac{\tilde{\rho}}{e_0} \dot{s} dV + \oint \vec{a} \times \vec{B} d\vec{\Sigma} - \int \left[ \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \cdot \vec{e} + \frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} (q\ddot{q} - \dot{q}^2) \right] dV. \quad (7,28)$$

Was den in (7,26)–(7,28) jeweils als Oberflächenintegral auftretenden Feldenergiebeitrag der magnetischen Wechselwirkung betrifft, so möchte ich angesichts der Tatsache, daß sein Wert in der gleichen Größenordnung liegt wie eine entsprechende Spinkorrektur, hier nicht auf die Behandlung spezieller Probleme wie den ZEEMAN-Effekt eingehen.

Selbst aber für den stationären Fall ist es nicht leicht, zu (7,27) allgemein zutreffende Aussagen zu machen. Der Betrag des bei begrenzter Bewegung mit einem magnetischen Moment des Teilchens verbundenen Vektorpotentials  $\vec{a}$  fällt mit hinreichend großer Entfernung ab wie  $1/r^2$ . Würde zugleich der Betrag der äußeren magnetischen Feldstärke  $\vec{B}$  mit zunehmendem Abstand vom mittleren Ort des Teilchens hin zur Berandung des quellenfreien Bereichs gegen Null gehen, so würde dieses Oberflächenintegral verschwinden. Das ist aber schon deshalb unmöglich, weil die hier zugrundegelegte Voraussetzung (7,23) des Verschwindens der Viererstromdichte  $\tilde{J}^k$  im stationären Fall eben die Homogenität des Magnetfelds  $\vec{B}$  impliziert.

Andererseits ist es angesichts des atomaren Aufbaus der Materie klar, daß es ein *exakt* homogenes Magnetfeld in ausgedehnten Bereichen überhaupt nicht gibt. Außerdem sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß es selbst bei beliebiger Superposition entsprechender Lösungen unmöglich ist, den stationären Zuständen eines Teilchens im homogenen Magnetfeld (s. [38]) irgendwelche dreidimensional lokalisierbare Ladungsverteilungen<sup>63)</sup> zuzuordnen. Die stationäre Gestaltsfunktion  $q$  bzw.  $Q$  wird hier zumindest in Richtung des Magnetfeldes räumlich periodisch.

Die darin zum Ausdruck kommende Nicht-Lokalisierbarkeit im homogenen Magnetfeld könnte bedeuten, daß auch in anderen Fällen wie etwa bei einem in Ruhe befindlichen freien Elektron das Bild eines individuellen einzelnen Teilchens grundsätzlich nicht anwendbar ist, sondern daß dort eher eine kontinuierliche Ladungsver-

<sup>63)</sup> Nach herkömmlichem Sprachgebrauch betrifft dies gleichermaßen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, die hier aber im Sinne einer Wechselwirkungswahrscheinlichkeit verstanden wird.

teilung beschrieben wird. In hinreichend großen Abständen aber werden die elektromagnetischen Felder – bis auf diejenigen der Strahlung – gegen Null gehen. Die Lokalisierbarkeit der gesamten Versuchsanordnung als einer zwar komplizierten, dafür aber realen Struktur wird zweifellos gewährleistet sein<sup>64</sup>. Bei einer solchen Betrachtung ist dann weder das Magnetfeld insgesamt homogen, noch die zugehörige Viererstromdichte überall Null. Mit letzterem entfallen die Voraussetzungen dieses Abschnitts 7.2, und es wäre zu einer statistischen Behandlung unter Einbeziehung aller felderzeugenden Ladungen überzugehen, was sicher die grundsätzlich angemessene Vorgehensweise ist, die hier aber nicht weiter verfolgt werden soll.

### 7.3 Die Energie-Frequenz-Beziehung für Photonen bei Übergängen im elektrischen Feld

Die im Rahmen klassischer Vorstellungen bisher gänzlich unverstandene Energie-Frequenz-Beziehung läßt sich am Beispiel des H-Atoms leicht ableiten, wie sogleich gezeigt werden soll. Grundlage dafür ist der in den Abschnitten 7.1-2 geführte Nachweis, daß es sich bei dem in der KLEIN-GORDON-Gleichung auftretenden Stationaritäts-Parameter  $\varepsilon \equiv m_0 c^2 + E$  tatsächlich um die relativistische Energie eines geladenen Teilchens im elektrischen Feld handelt, und zwar genau so, wie sie sich für diesen Fall aus dem konsistenten Energie-Impuls-Tensor ergibt. Während eines Übergangs nämlich, der offensichtlich durch eine zeitweilige Superposition der vorher und nachher besetzten – in (6,52) definierten, hier aber ohne den Teilchenindex K verwendeten – *stationären* Zustände zum vorgegebenen Potential  $\varphi_{\bar{K}}$

$$\psi_{\nu} \equiv q_{\nu}(\vec{r}) e^{-i[\varepsilon_{\nu} t - s_{\nu}^{\text{Rest}}(\vec{r})] / \hbar} \quad (7,29)$$

beschrieben wird, ist die Viererstromdichte (6,43) nicht mehr unabhängig von der Zeit. Vielmehr treten hier harmonisch oszillierende Ladungsverteilungen auf, deren Frequenz gerade mit der mittleren Frequenz des dabei ausgestrahlten elektromagnetischen Wellenzuges übereinstimmt. Dies hat bereits SCHRÖDINGER [33], [34] betont, wobei er allerdings die in den Abschnitten 7.1-2 (bzw. 7.6) bewiesene Identität des Stationaritäts-Parameters  $\varepsilon$  mit der Energie des Elektrons im Sinne BOHRs einfach voraussetzen mußte.

Wie auf Basis ‚klassischer‘ Überlegungen eigentlich von Anfang an erwartet, im Detail aber ganz anders, entspricht also bei jedem einzelnen Elementarprozeß die Frequenz der Ladungsozillation einfach der Frequenz der Strahlung. Doch ist diese Frequenz nunmehr – in eklatantem Unterschied zu allen ‚klassischen‘ Überlegungen – mit der Energie der dabei emittierten Strahlungsquanten verknüpft. Aus der zeitweiligen Superposition der beiden oben bezeichneten stationären Zustände

$$\psi_K \equiv \psi_1 + \psi_2, \quad (7,30)$$

wie sie strenggenommen allerdings nur im Falle  $\varphi_{\bar{K}} = \text{konstant}$  erlaubt ist, folgt bei Unterdrückung des Teilchenindex K und Einsetzung der Elektronenladung  $e_K := -e$  in die Ladungsdichte aus (6,43) zunächst

$$\tilde{\rho}_e \equiv \frac{-e}{m_e c^2} \left[ \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*) + e \varphi_{\bar{K}} |\psi|^2 \right] \quad (7,31)$$

und bei Verwendung des zeitlichen Mittelwerts

$$\bar{\rho}_e = \frac{-e}{m_e c^2} \left[ \varepsilon_1 q_1^2 + \varepsilon_2 q_2^2 + e \varphi_{\bar{K}} (q_1^2 + q_2^2) \right] \quad (7,32)$$

sowie der Abkürzung

$$\delta_{21}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{\hbar} \left[ s_2^{\text{Rest}}(\vec{r}) - s_1^{\text{Rest}}(\vec{r}) \right] \quad (7,33)$$

<sup>64</sup>) Der Sachverhalt, daß die Lokalisierbarkeit einer stationären Ladungsdichte im Widerspruch steht zu den Voraussetzungen eines homogenen äußeren Magnetfeldes, hat jedenfalls ganz und gar unklassische Konsequenzen. Auch manch anderes im Rahmen der herkömmlichen Elektrodynamik wohlvertraute Modell verbietet sich als strenge Lösung hier gewissermaßen von selbst. Der bei näherem Hinsehen leicht nachvollziehbare Grund liegt in unrealistischen Voraussetzungen, die allerdings ihren unbestreitbaren Wert für makroskopische Näherungen haben.

schließlich

$$\tilde{\rho}_e = \bar{\rho}_e + \frac{-e}{m_e c^2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2e\varphi_{\bar{K}}) q_1 q_2 \cos \left[ \frac{1}{\hbar} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) t + \delta_{21}(\vec{r}) \right]. \quad (7,34)$$

Demzufolge enthält die während des Übergangs zwischen den stationären Zuständen zeitweilig existierende Ladungsverteilung also die bereits von SCHRÖDINGER festgestellten oszillierenden Bestandteile. Die zugehörige räumliche Stromdichte ergibt sich mit dem zeitlichen Mittelwert

$$\tilde{j}_e = \frac{e_e}{m_e c} (q_1^2 \vec{\nabla} s_1^{\text{Rest}} + q_2^2 \vec{\nabla} s_2^{\text{Rest}}) - \frac{e_e^2}{m_e c^2} \vec{a}_{\bar{K}} (q_1^2 + q_2^2) \quad (7,35)$$

zu

$$\tilde{j}_e = \tilde{j}_K + \frac{e_e}{m_e c} \left[ \hbar (q_1 \vec{\nabla} q_2 - q_2 \vec{\nabla} q_1) \sin \frac{s_{21}}{\hbar} + (\vec{\nabla} s_1^{\text{Rest}} + \vec{\nabla} s_2^{\text{Rest}} - 2 \frac{e}{c} \vec{a}_{\bar{K}}) q_1 q_2 \cos \frac{s_{21}}{\hbar} \right], \quad (7,36)$$

wobei als Abkürzung

$$s_{21} \equiv (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) t + \delta_{21}(\vec{r}) \quad (7,37)$$

verwendet ist. Die Frequenz der gegebenenfalls mit einer ortsabhängigen Phasenverschiebung harmonisch schwingenden Ladungsverteilung beträgt

$$\omega \equiv \frac{|\Delta \varepsilon|}{\hbar}, \quad (7,38)$$

die SCHRÖDINGER im Sinne DEBROGLIES als Schwebungsfrequenz überlagerter Schwingungen mit den Einzel-frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gedeutet hat. Demgegenüber sei allerdings ausdrücklich angemerkt, daß es im Rahmen der hier skizzierten Theorie *nicht* notwendig ist, einem Atom auch in seinen stationären Zuständen irgendeine harmonische Schwingung zuzuschreiben – und zwar weder Frequenz noch Wellenlänge. *Annähernd monochromatische Oszillationen, die für Ausstrahlung elektromagnetischen Wellenfelder verantwortlich sind, existieren hier nur während der entsprechenden Übergänge.*

Nachdem es sich nun aber bei  $\Delta \varepsilon$  aufgrund des aus (7,14) in Verbindung mit (7,75) gewonnenen Resultats (7,15) erwiesenermaßen um die Energiedifferenz zweier stationärer Zustände vor und nach dem Übergang handelt, ist die Energie-Frequenz-Beziehung für Emissions- und Absorptionsprozesse am Beispiel des H-Atoms grundsätzlich abgeleitet und bewiesen. Denn die Differenz

$$|\Delta \varepsilon| = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad (7,39)$$

entspricht offensichtlich gerade dem Betrag der bei dem jeweiligen Übergang emittierten bzw. absorbierten Energie, welche Schlußfolgerung bei fehlendem äußeren Magnetfeld durch das entsprechende Resultat (7,27) zusätzlich in größerer Allgemeinheit bestätigt wurde. Es sei an dieser Stelle auch auf die wohlbekannte Tatsache hingewiesen, daß die Existenz unterschiedlicher Energieniveaus keine hinreichende, sondern im Sinne von (7,38) lediglich eine notwendige Bedingung für Strahlungsübergänge darstellt (Auswahlregeln s. a. 8.2)

Was schließlich die von PLANCK ursprünglich zur induktiven thermodynamischen Begründung seiner Formel herangezogenen ‚Resonatoren‘ betrifft, so sollte es genügen, die hier durchgeführte Deduktion auf Atomkerne in Molekülen sinngemäß zu übertragen. Die elektromagnetischen Wellenfelder aber, die von der oben berechneten oszillierenden Ladungsverteilung emittiert bzw. absorbiert werden, werden erst in Abschnitt 8.2 etwas näher besprochen. Es wird sich dabei eine ungefähre Vorstellung abzeichnen, was unter einem Photon zu verstehen sein könnte.

An dieser Stelle bietet es sich an, noch einmal kurz auf die Frage der Orthogonalität einzugehen, die ja in der nicht-relativistischen Quantenmechanik eine fundamentale Rolle spielt. Die aus der Kontinuitätsgleichung folgende Zeitunabhängigkeit des Integrals über die Ladungsdichte (7,34) bringt es mit sich, daß im Falle  $\delta_{21}(\vec{r}) = 0$  gelten muß

$$\int (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2e\varphi_{\bar{K}}) R_1 R_2 dV \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } \Delta m = 0, \quad (7,40)$$

wobei sich  $\Delta m$  hier wieder auf die magnetische Quantenzahl  $m$  bezieht. Das Resultat (7,40) zeigt, daß die Lösungen der KLEIN-GORDON-Gleichung zu verschiedenen Energiewerten *nicht* allgemein orthogonal sein können, denn sonst müßte ja gelten  $\int R_1 R_2 dV = 0$ . Von den Lösungen zum COULOMB-Potential beispielsweise betrifft diese Nicht-Orthogonalität jedes Lösungspaar mit gleicher Bahndrehimpulsquantenzahl  $l$  und gleicher magnetischer Quantenzahl  $m$ . Andernfalls ist die Orthogonalität bereits durch diejenige der Kugelflächenfunktionen sichergestellt (s. [40]). Bei entsprechender Rechnung auf Basis der SCHRÖDINGER-Gleichung würde der Summand  $e\phi_K$  in der Klammer von (7,40) aber gerade fehlen, woraus die Orthogonalität der zugehörigen Lösungen sofort ablesbar ist. Bei den Lösungen der KLEIN-GORDON-Gleichung kann es sich im Unterschied zu denen der SCHRÖDINGER-Gleichung also nicht im eigentlichen Sinne um Eigenfunktionen handeln<sup>65)</sup>.

Im Rückblick auf die historische Entwicklung mag eine gewisse Ironie darin liegen, daß die Energie-Frequenz-Beziehung, wie hier gezeigt, deduktiv abgeleitet werden kann, indem ein *kontinuierlicher* Übergang zwischen dem vorherigen und dem nachherigen stationären Zustand zugrundegelegt wird. Denn nur bei einem kontinuierlichen Übergang existiert für eine nicht-verschwindende Zeitspanne der mathematisch durch eine Superposition zu beschreibende Zwischenzustand, bei dem aufgrund harmonischer Schwingungen der Ladungsverteilung auch ein entsprechendes elektromagnetisches Wellenfeld besteht. Natürlich bleibt die Bezeichnung *Quantensprung* für derartige Prozesse höchst zutreffend – doch scheint es angebracht, diesen Begriff von einigen falschen Assoziationen<sup>66)</sup> zu befreien.

Das hier skizzierte Bild ist offensichtlich auf die einander entsprechenden Prozesse der Absorption und der induzierten Emission anwendbar. Das zusätzliche Auftreten unharmonischer Fluktuationen könnte möglicherweise erklären, wie es zum Phänomen der ‚spontanen‘ Emission aus angeregten Zuständen kommen kann, obwohl die Energie der durch Superposition verschiedener stationärer Lösungen gebildeten Zwischenzustände nach der SCHRÖDINGER-Gleichung erhalten bleiben sollte<sup>67)</sup>.

## 7.4 Das Konzept der Zuordnung von Operatoren zu mechanischen Größen

Die im Rahmen der bisherigen Quantenmechanik *axiomatische* Zuordnung von Operatoren zu klassischen Größen möge nun im Hinblick auf einige Gleichungen der in den vorausgegangenen Abschnitten skizzierten Theorie überprüft werden. Neben der Feststellung einer sehr weitgehenden Übereinstimmung geht es dabei aber auch darum, beide Konzepte im Interesse größtmöglicher Klarheit gegeneinander abzugrenzen.

Dies geschieht am besten durch Anwendung einiger charakteristischer Operatoren auf den in (6,65) definierten komplexen SCHRÖDINGER-Skalar  $\chi$  einerseits sowie die Berechnung der entsprechenden Komponenten des Energie-Impuls-Tensors (7,20) andererseits. Bei – in diesem wie im folgenden Abschnitt durchgängiger – Unterdrückung des Teilchenindex  $K$  sei nun also

$$\psi \equiv q e^{is/\hbar} \quad (7,41)$$

eine Lösung (6,39) der KLEIN-GORDON-Gleichung, wohingegen es sich bei

$$\chi \equiv Q e^{i\sigma/\hbar} \quad (7,42)$$

um eine Lösung (6,65) der entsprechenden SCHRÖDINGER-Gleichung handeln soll. Gemäß (6,61) gilt dabei die Identität  $s \equiv -mc^2 t + \sigma$ , und es ist  $q \approx Q$ , wie aus Abschnitt 6.3.d hervorgeht. Wird nun unter dem Symbol  $\zeta \equiv \tilde{p}/e_0 \equiv \tilde{\mu}/m_0 c^2$  je nach Zusammenhang die Dichtefunktion der KLEIN-GORDON- bzw. der SCHRÖDINGER-

<sup>65)</sup> Es liegt deshalb nahe, eine Modifikation der KLEIN-GORDON-Gleichung in Betracht zu ziehen (s. Anhang), die orthogonale Lösungen gewährleistet, was bei der DIRAC-Gleichung wie bei der SCHRÖDINGER-Gleichung bekanntlich von Anfang an der Fall ist.

<sup>66)</sup> Ich verstehe den Sprung zwischen zwei Stufen als einen *kontinuierlichen* Übergang, wobei allerdings die Zeitspanne während des Übergangs gegenüber der Verweildauer auf den Stufen in der Regel sehr klein ist.

<sup>67)</sup> Eine einfache Rechnung führt bei Berücksichtigung der Orthogonalität der Eigenfunktionen zu diesem Ergebnis. Analog zur gewöhnlichen Kontinuitätsgleichung für die Ladung (Wahrscheinlichkeitsdichte) folgt nämlich aus der SCHRÖDINGER-Gleichung auch eine Kontinuitätsgleichung für die Energie (die einfache Ableitung habe ich allerdings in der Literatur nicht gefunden).

Gleichung verstanden, wobei dies im ersten Fall  $\zeta \equiv -q^2 (\dot{s} + e_0 \varphi_{\bar{\kappa}}) / m_0 c^2$  bedeutet, im zweiten Fall dagegen  $\zeta \equiv Q^2$ , so läßt sich schreiben

$$\begin{aligned}\bar{x} &\equiv \bar{X} = \int \bar{x} \zeta dV, \\ \overline{x^2} &= \int \bar{x}^2 \zeta dV,\end{aligned}\tag{7,43}$$

womit die Schwerpunktskoordinaten und die mittlere quadratische Ausdehnung definiert sind. Demgegenüber spricht die konventionelle Quantenmechanik hier von dem Erwartungswert des Ortsvektors eines punktförmig gedachten Teilchens sowie – im Sinne einer prinzipiellen Unschärfe – von dessen mittlerem Schwankungsquadrat. In der bereits in Abschnitt 6.5 aus dem konsistenten Energie-Impuls-Tensor (6,106) als nicht-relativistische Näherung wiedererkannten Operatorenbeziehung (6,110) tritt

$$P^k \equiv p^k + \frac{e_0}{c} A^k \rightarrow i\hbar \partial^k \tag{7,44}$$

als Repräsentant des *verallgemeinerten* Viererimpulses auf. Nun ergibt sich aus (7,20) durch partielle Integration – bei der wie auch in allen anderen Fällen dieses Abschnitts 7.4 das Verschwinden der jeweils entstehenden Randintegrale vorausgesetzt ist – mit Rücksicht auf die MAXWELL'sche Gleichung  $\text{div } \vec{e} = \tilde{\rho}$  die Energie

$$\int \tau_0^0 dV = \varepsilon_V = - \int \frac{\tilde{\rho}}{e_0} \dot{s} dV + \int \vec{b} \vec{B} dV - \int \left[ \frac{1}{c} \vec{e} \dot{\vec{A}} + \frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} (q \ddot{q} - \dot{q}^2) \right] dV. \tag{7,45}$$

Demgegenüber entsteht bei Anwendung der Operatorenbeziehung (7,44) das Ergebnis

$$\bar{E} = i\hbar \int \chi^* \dot{\chi} dV = - \int Q^2 \sigma dV, \tag{7,46}$$

wo bei der Integration wie bereits am Ende des Abschnitts 6.5 wiederum von der Orthogonalität der SCHRÖDINGER'schen Eigenfunktionen  $Q_\nu$  Gebrauch gemacht ist. Es ist offensichtlich, daß beide Ergebnisse im stationären Falle und bei fehlendem äußeren Vektorpotential mit  $\varepsilon \equiv m_0 c^2 + E$  genau übereinstimmen, wenn wie üblich  $Q^2$  – im Unterschied zu  $q^2$  – auf den Wert 1 normiert ist. Dementsprechend folgt aus (7,20) für den Impuls der Ausdruck

$$\frac{1}{c} \int \tau_0^\alpha dV = \vec{P}_V = \int \frac{\tilde{\rho}}{e_0} \left( \vec{\nabla} s - \frac{e_0}{c} \vec{A} \right) dV + \frac{1}{c} \int (\vec{e} \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{b}) dV - \frac{\hbar^2}{m_0 c^2} \int \dot{q} \vec{\nabla} q dV, \tag{7,47}$$

der sich für wichtige Sonderfälle ebenfalls erheblich vereinfachen läßt, während bei Anwendung der Operatorenbeziehung

$$\vec{P} = -i\hbar \int \chi^* \vec{\nabla} \chi dV = \int Q^2 \vec{\nabla} \sigma dV \tag{7,48}$$

resultiert. Dem negativen Integral über die drei räumlichen Komponenten der Spur des gemischten Energie-Impuls-Tensors (7,20) aber

$$- \int \tau_\alpha^\alpha dV = \frac{1}{m_0} \int q^2 \left( \vec{\nabla} s - \frac{e_0}{c} \vec{A} \right)^2 dV + \int (\vec{e} \vec{E} + \vec{b} \vec{B}) dV - \frac{\hbar^2}{m_0} \int \left\{ q \Delta q - \frac{3}{4} \partial_0^0 (q^2) \right\} dV, \tag{7,49}$$

dessen zeitlicher Mittelwert nach dem Satz von LAUE (s. Abschn. 4.2) im Schwerpunktsystem verschwinden muß, sei der durch doppelte formale Anwendung von (7,44) berechnete und deshalb allgemein als Erwartungswert des Impulsquadrats bezeichnete Ausdruck

$$\overline{\vec{P}^2} = -\hbar^2 \int \chi^* \Delta \chi dV = \int Q^2 (\vec{\nabla} \sigma)^2 dV - \hbar^2 \int Q \Delta Q dV \tag{7,50}$$

gegenübergestellt, dessen Analogon in (7,49) leicht wiederzuerkennen ist. Eine Deutung des letztgenannten Ausdrucks als doppelte kinetische Energie  $p^2/m_0$  eines Teilchens ist im Hinblick auf den phänomenologischen

Energie-Impuls-Tensor (5,2) zunächst durchaus plausibel. Bei einer wegen  $q \approx Q$  möglichen näherungsweisen Ersetzung entsprechender Terme gemäß (7,50) geht (7,49) im Falle der Stationarität und verschwindenden äußeren Vektorpotentials über in

$$-\int \tau_{\alpha(\vec{A}=0)}^{\alpha \text{ stationär}} dV \stackrel{!}{=} 0 \approx \frac{\bar{P}^2}{m_0} + \int \tilde{\rho} \phi dV, \quad (7,51)$$

was offenbar den wohlbekannten klassischen Virialsatz – hier ohne die üblicherweise erforderliche Renormierung – als eine Konsequenz des LAUE-Theorems impliziert. Es bietet sich in dieser Näherung tatsächlich an, in (7,50) nach Division durch  $2m_0$  eine kinetische Energie des Teilchens zu sehen. Im Hinblick auf (7,48) wird darin das erste Integral rechter Hand etwa als das Quadrat des eigentlichen Impulses  $\vec{P}$  verstanden, wohingegen das zweite Integral als ‚Schwankungsquadrat des Impulses‘ betrachtet wird, das vermeintlich in einer klassischen Physik keine Entsprechung hat. Richtig ist, daß es in einer *Punktmechanik* keine Entsprechung hat.

Bereits aus Sicht der klassischen Physik ist aber klar, daß das Quadrat des Integrals über die Impulsdichte  $\vec{P}$  nicht unbedingt das gleiche ergeben muß wie  $\bar{P}^2$  als das mit dem Faktor  $2m_0$  multiplizierte Integral über die Dichte der kinetischen Energie, sonst wäre ja die in der Vibration eines Gummiballs steckende kinetische Energie in dessen Schwerpunktsystem immer gleich Null.

Die beiden Integranden des hier diskutierten Ausdrucks (7,50) lassen sich für  $\sigma = -Et + C\phi$  in Kugelkoordinaten zusammenfassen als

$$-\hbar^2 \frac{Q}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial Q}{\partial r} \right) - \hat{\Lambda} Q \right] \quad (7,52)$$

mit

$$\hat{\Lambda} Q = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left( \frac{C^2 Q}{\hbar^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} \right). \quad (7,53)$$

Es ist klar, daß die zuletzt auftretende Klammer unter anderem so gewählt werden kann, daß dort  $m^2 Q$  steht – mit  $m$  als der magnetischen Quantenzahl – sodaß der gesamte Ausdruck der Anwendung des Legendre-Operators auf die Funktion  $Q$  entspricht. Dieser wird bis auf den Faktor  $-\hbar^2$  üblicherweise als der so genannten Operator des Drehimpulsquadrats interpretiert, woraus geschlossen wird, daß im Zentralfeld das Quadrat des Drehimpulses die Werte  $l(l+1)\hbar^2$  annehmen muß. Auch diese Auffassung basiert letztlich darauf, den durch  $2m_0$  dividierten Ausdruck (7,50) als kinetische Energie zu betrachten. Nun wird sich aber sogleich zeigen, daß eine solche Auffassung – die ‚revolutionäre‘ nicht-klassischen Konsequenzen zu implizieren scheint – keineswegs zwingend ist. Im Gegenteil, eine Berechnung des Drehimpulses aus dem hier zugrundeliegenden Energie-Impuls-Tensor (7,20) ergibt

$$\frac{1}{c} \int \vec{r} \times \vec{\tau}_0 dV = \vec{L} = \int \vec{r} \times \frac{\tilde{\rho}}{e_0} \left( \vec{\nabla} s - \frac{e_0}{c} \vec{A} \right) dV + \frac{1}{c} \int \vec{r} \times \left( \vec{e} \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{b} \right) dV - \frac{\hbar^2}{m_0 c^2} \int \vec{r} \times \dot{q} \vec{\nabla} q dV \quad (7,54)$$

mit  $\vec{\tau}_0 \equiv \tau_0^\alpha$ , was im stationären Fall und bei fehlendem äußeren Vektorpotential in

$$\vec{L}_{(\vec{A}=0)}^{\text{stationär}} = \int \frac{\tilde{\rho}}{e_0} \vec{r} \times \vec{\nabla} s dV + \frac{1}{c} \int \vec{r} \times \left( \vec{E} \times \vec{b} \right) dV \quad (7,55)$$

übergeht. Nun hat aber der Drehimpuls (7,55) ebenso wie der aus der Operatorenbeziehung (7,44) folgende korrespondierende Ausdruck

$$\vec{L} = -i\hbar \int \chi^* \vec{r} \times \vec{\nabla} \chi dV = \int Q^2 \vec{r} \times \vec{\nabla} \sigma dV \quad (7,56)$$

in allen drei Komponenten grundsätzlich wohlbestimmte exakte Werte, wobei allerdings das jeweilige Quadrat dieses Drehimpulses nicht mit den Eigenwerten des so genannten Operators des Drehimpulsquadrats übereinstimmt. Meines Erachtens zeigt diese Diskrepanz einfach die Grenzen der bisherigen ‚modernen‘ Auffassung auf, die den gesamten Energie-Impuls-Tensor – allerdings ausgerechnet im Sinne der ‚klassischen‘ Physik – als Summe von nur zwei Bestandteilen deuten will, bei denen es sich einmal um den des elektromagnetischen Fel-

des und zum anderen um einen allerdings zwangsläufig seltsamen kinetischen Energie-Impuls-Tensor der Teilchen handeln soll.

Doch die in (6,96-99) durchgeführte Zerlegung überträgt sich natürlich als  $\tau_i^k = L_i^k + M_i^k + Q_i^k$  auch auf den Energie-Impuls-Tensor (7,20) geladener Teilchen im quellenfreien Bereich elektromagnetischer Felder. Es wäre deshalb im Sinne des hier skizzierten Konzepts beinahe unnatürlich, die beiden Bestandteile  $M_i^k$  und  $Q_i^k$  – die doch gemäß (6,98), (6,99) leicht erkennbar ihre eigenständige Bedeutung haben – um jeden Preis zu einem einzigen physikalischen Gegenstand zusammenfassen zu wollen, obwohl dies andererseits im Hinblick auf (6,103) tatsächlich naheliegen mag.

Zur weiteren Klärung sei noch der aus (7,20) gegebenenfalls resultierende Energie-Impuls-Tensor elektrisch neutraler staubförmiger Materie untersucht, die allerdings bereits im Hinblick auf das zugrundeliegende Variationsprinzip (6,1-3) strenggenommen nur als mathematische Abstraktion existiert. Mit (6,36) läßt sich (7,20) in diesem Fall formal schreiben als

$$\tau_i^k \text{ (Staub)} = -\frac{c}{m_0} \tilde{\pi}_i s^k + \frac{\hbar^2}{m_0} \left[ q_i q^k - \frac{1}{4} \delta_i^k \partial_l^l (q^2) \right]. \quad (7,57)$$

Um einen *lokalisierbaren* Energie-Impuls-Tensor der Form (7,57) im Einklang mit der KLEIN-GORDON-Gleichung zu erhalten, ist es offenbar erforderlich, die entsprechenden Skalare  $s$  und  $q$  durch Superposition freier Lösungen<sup>68)</sup> gemäß  $\psi = \Sigma \psi_\nu$  überhaupt erst zu bilden. Mit anderen Worten geht es hier um die Beschreibung eines freien neutralen Teilchens durch ein Wellenpaket. Aus (7,57) folgt dann für die Energie eines solchen ‚Teilchens‘ durch partielle Integration unter der Voraussetzung verschwindender Randintegrale

$$\int \tau_0^{0 \text{ (Staub)}} dV \equiv \mathcal{E} \text{ (Staub)} = \int \left[ -\frac{\tilde{\mu}}{m_0} \dot{s} + \frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} (\dot{q}^2 - q \ddot{q}) \right] dV, \quad (7,58)$$

und der Impuls berechnet sich als

$$\frac{1}{c} \int \tau_0^{\alpha \text{ (Staub)}} dV \equiv \vec{p} \text{ (Staub)} = \int \left( \frac{\tilde{\mu}}{m_0} \vec{\nabla} s - \frac{\hbar^2}{m_0 c^2} \dot{q} \vec{\nabla} q \right) dV. \quad (7,59)$$

Von besonderer Bedeutung sind nun die Integrale über die räumlichen Komponenten  $\tau_\alpha^\beta \text{ (Staub)}$ , die den quantenmechanischen Spannungstensor der Gestalt (Verteilung) enthalten. Im Hinblick auf die Transformationsformel (4,3) für die Energie ist es interessant, das betreffende Diagonalelement auszuschreiben in der Form

$$\int \tau_1^{1 \text{ (Staub)}} dV \equiv P_1^{1 \text{ (Staub)}} = -\frac{1}{m_0} \int \left[ q^2 (s_x)^2 + \hbar^2 (q_x)^2 \right] dV - \frac{\hbar^2}{4m_0 c^2} \partial_{tt}^2 \int q^2 dV. \quad (7,60)$$

Damit sich nun Energie und Impuls als Vierervektor transformieren wie bei einem realen neutralen Teilchen, wäre es nach dem LAUE-Theorem erforderlich, daß der zeitliche Mittelwert dieses Integrals verschwindet. Gerade das ist aber nicht ohne weiteres möglich, da bei der Mittelwertbildung zwar der letzte Ausdruck rechter Hand im Falle  $\dot{s} = -\mathcal{E} = \text{konstant}$  verschwindet, was bei dem davorstehenden aber aufgrund des offensichtlich positiv definiten Integranden durchaus nicht der Fall ist. Daraus schließe ich, daß die Darstellung eines neutralen Teilchens als Wellenpaket *freier* Lösungen grundsätzlich problematisch ist und jeweils nur – und zwar vorübergehend – Näherungscharakter haben kann. Demgegenüber wird später eine zwar grobe, dafür aber vergleichsweise realistische Darstellung in Abschnitt 7.6 am Beispiel des H-Atoms aufgezeigt, die allen *prinzipiellen* Erfordernissen zu genügen scheint. Als Wellenpaket freier Lösungen<sup>69)</sup> aber läßt sich ein solches H-Atom wegen des

<sup>68)</sup> Es ist bemerkenswert, daß der einem ‚freien‘ Teilchen mit ‚scharfem‘ Impuls  $\hbar k$  zugeordneten Lösung  $\psi = \text{konstant}$   $e^{ikx}$  überhaupt keine Wellenstruktur der Stromdichte entspricht, die *erst durch Superposition* zustandekommt.

<sup>69)</sup> Im Rahmen der hier entwickelten Vorstellungen ist die quantenmechanische Beschreibung eines jeden atomar zusammengesetzten Gebildes grundsätzlich immer als Superposition der Zustände aller beteiligten Teilchen anzusetzen. Denn genaugenommen gelten die Grundgleichungen nur für diese. Gegebenenfalls ist ein entsprechendes Wellenpaket aus nicht-zerfließenden gebundenen Eigenfunktionen, nicht aber aus freien Lösungen aufzubauen. Letzteres ist meines Erachtens lediglich näherungsweise erlaubt. Daß sich aber ein zusammengesetztes Objekt der Masse  $m$  unter dem Einfluß einer potenti-

damit verbundenen Phänomens eines unrealistisch schnellen Zerfließens ( $\dot{s} \neq \text{konstant}$ ) nicht über angemessene Zeiträume darstellen.

Die konventionelle Quantenmechanik geht diesem Problem aus dem Wege, indem sie auf die oben besprochene axiomatische Zuordnung von Operatoren zu den entsprechenden Größen der klassischen oder relativistischen Punktmechanik zurückgreift, was *näherungsweise* mit den soeben abgeleiteten Resultaten übereinstimmt.

Aus dem Vorausgegangenen ist nun ersichtlich, daß diese Zuordnung – deren allerdings eingeschränkte Berechtigung hier letztlich aus dem dahinterstehenden konsistenten Energie-Impuls-Tensor (6,84-85) abgeleitet ist – ihre Grenzen haben muß. Andererseits ist aufgrund früherer Abschnitte prinzipiell klar, daß es sich bei einer relativistischen Punktmechanik ohnehin um ein Ding der Unmöglichkeit handelt. Der Grund ist, daß für Kräfte der Gestaltbildung und -änderung darin von Anfang an kein Platz vorgesehen ist, obwohl solche Kräfte in der Natur eine fundamentale Rolle spielen *müssen*. Nichts anderes wurde bereits in Abschnitt 4 an den Beispielen der dynamischen Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie gezeigt.

Alles in allem scheint die historisch gewachsene, konventionelle Quantenmechanik bei näherem Hinsehen einem mathematischen Modell zu entsprechen, das den Begriff des Punktteilchens so modifiziert hat, daß dieser Begriff zur statistischen Behandlung ausgedehnter deformierbarer Objekte verwendet werden kann. Letzten Endes ist eine statistische Behandlung sogar unumgänglich, weil jeder Meßprozeß – was die Erfahrung lehrt – immer mit dem Austausch *ganzer* Teilchen wie Photonen, Elektronen, Müonen, Mesonen usw. verbunden ist.

## 7.5 Zur Deutung der HEISENBERG'schen Unschärferelation

Es ist eine experimentell bestätigte Tatsache, daß bei der quantenmechanischen Berechnung der Spektraltermine jeweils die Mitbewegung des Atomkerns durch geeignete Verwendung der reduzierten Masse zu berücksichtigen ist. Darauf wurde insbesondere auch in Abschnitt 7.1 hingewiesen. Die Übereinstimmung der so erhaltenen Resultate mit dem Experiment aber impliziert dann als eine *Erfahrungstatsache*, daß der Impuls des Protons im H-Atom bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktsystems zumindest während der Übergänge verschieden von Null, und dabei dem Impuls des Elektrons sehr genau entgegengesetzt gleich ist. Wie aber läßt sich eine solche Präzision damit vereinbaren, daß eine so genannte *Unschärfe* des Protonenimpulses – weil dessen lineare Ausdehnung in etwa mit seiner Compton-Wellenlänge übereinstimmt – bei ungefähr  $m_p c$  liegen sollte, was die des Elektronenimpulses größenordnungsmäßig um nicht weniger als einen Faktor von  $10^5$  überträfe? In einem entsprechenden Verhältnis hätten auch die Werte der kinetischen Energie zu stehen. Die Gültigkeit der HEISENBERG'schen Unschärferelation in der Form

$$\overline{\Delta p_x} \overline{\Delta x} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (7,61)$$

ist als eine *mathematische* Tatsache von unumstößlicher Gewißheit, wenn bezüglich des jeweiligen Schwerpunktsystems im Sinne einer mittleren quadratischen Ausdehnung (7,43) zum einen

$$\overline{\Delta x^2} \equiv \int \chi^* x^2 \chi \, dV, \quad (7,62)$$

und zum anderen

$$\overline{\Delta p_x^2} \equiv -\hbar^2 \int \chi^* \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \, dV, \quad (7,63)$$

*per definitionem* gesetzt sind. Es stellt sich nach dem Vorausgegangenen allerdings die Frage, in welchem Sinne es sich bei  $\overline{\Delta p_x}$  überhaupt um die Unschärfe eines Impulses handeln muß. Eine solche Interpretation setzt offensichtlich voraus, daß alles, was nicht dem ruhmassenfreien elektromagnetischen Feld angehört, einem kinetischen Energie-Impuls-Tensor der Materie zuzuschreiben ist, der – so gut es geht – analog zu dem phänomenologisch assoziierten verstanden wird. Ist aber eine solche Zuordnung tatsächlich angebracht? Obwohl durch die

---

ellen Energie  $U$  durch eine SCHRÖDINGER-Gleichung im 3-dimensionalen Raum vollständig beschreiben ließe, ist aus dieser Sicht unzutreffend.

entsprechende Dimension Masse·Geschwindigkeit nahegelegt, spricht einiges auch dagegen. Dies wurde bereits im vorausgegangenen Abschnitt angedeutet und soll nun noch etwas vertieft werden.

Zuerst sei angemerkt, daß im Rahmen der hier entwickelten Vorstellungen bei der Interpretation der HEISENBERG'schen Unschärferelation das Problem eines Grenzübergangs  $\overline{\Delta x} \rightarrow 0$  anders als in der konventionellen Quantenmechanik gar nicht auftreten kann, und zwar deshalb, weil es hier wie in der Natur einfach keine punktförmigen Teilchen gibt. Ausgedehnte deformierbare Teilchen aber werden sich *natürlich* nicht durch eine Ortsmessung beliebig scharf ‚lokalisieren‘ lassen.

Bei dem in dieser Arbeit skizzierten Konzept handelt es sich – wie aus dem zugrundeliegenden Variationsprinzip unmittelbar ersichtlich – um das *einer Skalar-Vektor-Tensor-Theorie*. Im Hinblick darauf ist es nur konsequent und vergleichsweise unproblematisch, sich analog zu der in (6,96-99) durchgeführten Zerlegung den Energie-Impuls-Tensor (7,20) aus demjenigen eines antisymmetrischen Feldstärke-Tensors  $f_{ik}$ , demjenigen eines erweiterten Potential-Vektors  $\tilde{a}_i$  und schließlich demjenigen eines Quanten-Skalars  $q$  zusammengesetzt zu denken in der Form  $\tau_i^k = L_i^k + M_i^k + Q_i^k$  (wobei zur Berücksichtigung der Gravitation gegebenenfalls noch der auf dem symmetrischen Fundamental-Tensor beruhende unsymmetrische Bi-Tensor  $t_i^k$  hinzuzunehmen wäre). Die Stärke dieser Auffassung tritt deutlich zutage, wenn z. B. das Gleichgewicht des H-Atoms explizit nachvollzogen wird. Hier ist zunächst einmal

$$\tilde{s}_\alpha^{\text{H-(stationär)}} = s_\alpha, \quad (7,64)$$

wie das auch in allen anderen Fällen bei Vernachlässigung des Vektorpotentials des Atomkerns der Fall ist. Die einfache Rechnung ergibt daraufhin

$$\begin{aligned} \partial_k \tau_0^k(\text{stationär}) &= 0, \\ \partial_k \tau_\alpha^k(\text{stationär}) &= \tilde{\rho} \vec{E} + \frac{\hbar^2}{2m_0} q^2 \vec{\nabla} \left( \frac{\Delta q}{q} \right) - \frac{1}{2m_0} q^2 \vec{\nabla} [(\vec{\nabla} s)^2] = 0, \end{aligned} \quad (7,65)$$

wobei sich die zweite Zeile mit Verwendung der reellen Grundgleichungen in der Form (6,57), (6,33) leicht verifizieren läßt. Was also im Grundzustand des H-Atoms (genauer: in allen Zuständen mit der magnetischen Quantenzahl  $m = 0$ , d.h.  $s_\alpha = 0$ ) der dort rein elektrischen LORENTZ-Kraft  $\tilde{\rho} \vec{E}$  auf die Ladungsverteilung des Elektrons das Gleichgewicht hält, ist eine hier nachgewiesene allein aus dem räumlichen Spannungs-Tensor<sup>70)</sup>  $Q_\alpha^\beta$  des reellen Formskalars  $q$  entspringende Widerstandskraft gegenüber einer Konzentration auf kleinere Abmessungen<sup>71)</sup>. Es ist offensichtlich, daß diese Widerstandskraft nichts mit einem Impuls zu tun haben muß, denn die Stromdichte ist hier – wiederum bei Vernachlässigung aller Spineffekte – gleich Null. Deshalb brauchen entsprechende Energiebeiträge auch nicht der kinetischen Energie des Teilchens zugerechnet zu werden, und zwar meines Erachtens ebensowenig wie die Nullpunktsenergie des Oszillators. Es genügt, den Energie-Impuls-Tensor der Gestalt  $Q_i^k$  als eigenständige physikalische Größe anzusehen, der nicht weniger real ist als derjenige des elektromagnetischen Feldes  $L_i^k$  oder derjenige der Strömung  $M_i^k$ .

Daß aber die Einbeziehung von Beiträgen einer Gestaltfunktion unumgänglich ist, steht in Einklang mit der aus der Diskussion der rotierenden Scheibe und den dynamischen Paradoxa geschlossenen Unmöglichkeit einer scharfen Trennung von relativistischer Kinematik und Dynamik [2]. Diese findet gerade ihren Ausdruck in den

<sup>70)</sup> Es sind nur die räumlichen Komponenten des Energie-Impuls-Spannungs-Tensors  $Q_i^k$  der Verteilung genannt, weil es hier genügt, gerade diesen Anteil dem MAXWELL'schen Spannungstensor gegenüberzustellen.

<sup>71)</sup> Diese könnte auch als schärfere Lokalisation bezeichnet werden. Der Begriff *Lokalisation* bedeutet dann aber nicht mehr Ortsmessung eines Punktteilchens, sondern eben die für eine gewisse Zeitspanne hergestellte Konzentration einer ausgedehnten deformierbaren Struktur auf einen gewissen Bereich des dreidimensionalen Raums. In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, daß im Unterschied zu dem von POINCARÉ vorgeschlagenen skalaren Druck, die hier konstatierte Widerstandskraft gegen eine Verkleinerung der Abmessungen gerade das umgekehrte Vorzeichen hat, weil POINCARÉ den Zusammenhalt eines *freien* Elektrons trotz (vermeintlicher) Abstoßung seiner Bestandteile erklären wollte, die es aber rückblickend gar nicht zu geben scheint. Außerdem handelt es sich hier um Druckkräfte, die zwar aus dem Energie-Impuls-Tensor eines Skalars entspringen, nicht aber um einen skalaren Druck als Bestandteil des Energie-Impuls-Tensors.

HEISENBERG'schen Unschärferelationen, welche – wie betont – immer eine kinematische mit einer dynamischen Größe verknüpfen.

Selbst bei absolut scharf definiertem Impuls eines lokalisierbaren Teilchens aber – z.B. bei exaktem Wert Null des Impulses im Schwerpunktsystem – werden immer Unschärfen der *Impulsdichten* auftreten, weil sich die Bestandteile ausgedehnter deformierbarer Strukturen im allgemeinen gegeneinander bewegen.

## 7.6 Notwendigkeit einer Vertiefung des Konzepts im Hinblick auf das Proton im H-Atom

Wäre es nicht ganz unmöglich, die Verhältnisse in der Umgebung eines Elektron-Proton-Paares vollständig und im Detail zu berücksichtigen, dann sollte die Methode der konsistenten Felder mit wesentlich größerer Genauigkeit zum Ziel führen, als das bei der folgenden Behandlung des H-Atoms tatsächlich der Fall ist. Diese Methode bietet sich an, weil eigentlich zwei Gleichungen für Elektron und Proton in wechselseitigem Feld zu lösen sind, näherungsweise nämlich

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \chi_e + (E_e - e_e \varphi_p) \chi_e \approx 0, \\ \beta) \quad & \frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta \chi_p + (E_p - e_p \varphi_e) \chi_p \approx 0. \end{aligned} \quad (7,66)$$

Die eben angesprochene Ungenauigkeit bezieht sich dabei vor allem auf die allein statistisch erfaßbaren Anfangsbedingungen einer jeweiligen konkreten Situation.

Trotzdem soll die prinzipielle Vorgehensweise hier auf den Grundzustand des H-Atoms angewandt werden, aus dessen Energie sich bekanntlich unmittelbar die Ionisierungsarbeit ablesen läßt. Die Übertragung des Verfahrens auf Übergänge zwischen stationären angeregten Zuständen bietet zwar grundsätzlich keine größeren Schwierigkeiten, ist aber aufgrund der komplizierteren mathematischen Ausdrücke weniger übersichtlich. Da es in dieser Arbeit vor allem um prinzipielle Zusammenhänge geht, sei das entsprechende Verfahren lediglich grob, aber nachvollziehbar skizziert.

Die KLEIN-GORDON-Gleichung eines spinfreien Teilchens der Ladung  $-e$  im COULOMB-Potential eines fiktiven *ortsfesten* und ebenfalls spinfreien Kerns der Ladung  $+e$  läßt sich bekanntlich vollständig und exakt lösen. Das Ergebnis zeigt, daß für den gemäß (6,51) vorausgesetzten Parameter  $\varepsilon_e$  der stationären Lösungen ein ganzes Spektrum existiert. Und zwar gilt

$$\varepsilon_{e\nu} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left[ \nu - (l + \frac{1}{2}) + \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2} \right]^2}}} \approx m_e c^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2\nu^2} \right), \quad (7,67)$$

wobei hier  $\nu$  die positive Haupt-, und  $l < \nu$  die nichtnegative Bahndrehimpuls-Quantenzahl bedeuten, die beide ganzzahlig sind. Bei dem dimensionslosen Wert  $\alpha \equiv e^2/\hbar c$  handelt es sich um die SOMMERFELD'sche Feinstrukturkonstante. Aus der rechts stehenden Näherung ist der zweite Summand nach Ausmultiplikation sofort als das entsprechende Resultat der SCHRÖDINGER-Gleichung in seiner vertrauten Form ablesbar.

Die zum Grundzustand des Elektrons im H-Atom gehörige Eigenfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung, die hier als bequeme Näherung für die entsprechende Lösung der KLEIN-GORDON-Gleichung verwendet wird, ist bekanntlich

$$\psi_{e0} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^3}} e^{-r/r_B - i\varepsilon_{e0}t/\hbar}, \quad (7,68)$$

wobei  $r_B$  für den BOHR'schen Radius steht, und der Index 0 auf den Grundzustand verweisen soll. Es ist nun interessant, umgekehrt auch eine Näherungslösung für den Grundzustand des Protons im Feld des Elektrons zu suchen. Mit  $e_e = -e$  entspricht der Eigenfunktion (7,68) des Elektrons eine Ladungsdichte von

$$\tilde{\rho}_{e0} \approx -\frac{e}{\pi r_B^3} e^{-2r/r_B}. \quad (7,69)$$

Aus den MAXWELL'schen Gleichungen folgt daraus bei Beachtung des hier durchgängig verwendeten *modifizierten* HEAVISIDE'schen Maßsystems<sup>72)</sup> für das Elektronenpotential im Grundzustand

$$\varphi_{e0} \approx -e \left[ \frac{1}{r} - \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_B} \right) e^{-2r/r_B} \right] \approx -\frac{e}{r_B} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{r^2}{r_B^2} \right) + O^3 \left( \frac{r}{r_B} \right). \quad (7,70)$$

Es ist daraufhin sehr einfach, näherungsweise die SCHRÖDINGER-Gleichung des Protons in diesem – allerdings wiederum nur fiktiven, weil ebenfalls als ortsfest unterstellten – elektromagnetischen Potential des Elektrons zu lösen. Aus

$$\frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta \chi_{p0} + \left[ \left( E_p + \frac{e^2}{r_B} \right) - \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_B^3} r^2 \right] \chi_{p0} \approx 0 \quad (7,71)$$

läßt sich in Analogie zur Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung des räumlichen Oszillators die Energie  $E_{p0}$  für den Grundzustand des Protons sofort ablesen mit dem Ergebnis

$$E_{p0} + \frac{e^2}{r_B} \approx \frac{3}{2} \hbar \omega_{p0} \approx \sqrt{3} \frac{e^2}{r_B} \sqrt{\frac{m_e}{m_p}}. \quad (7,72)$$

Die zu dieser groben Näherung gehörige räumliche Eigenfunktion des Protons würde sich in einer Umgebung von etwa  $r < r_B/5$  darstellen als

$$\chi_{p0} \approx \frac{1}{(\sqrt{\pi} r_{p0})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{r^2}{r_{p0}^2}} \quad (7,73)$$

mit

$$r_{p0} \approx r_B \sqrt[4]{\frac{3}{4} \frac{m_e}{m_p}}. \quad (7,74)$$

Diese der ersten Näherung entsprechende Lokalisierung ist numerisch zweifellos ganz unbefriedigend. Doch geht es hier zunächst um prinzipielle Erwägungen. Üblicherweise wird bei der Behandlung des H-Atoms überhaupt nicht nach einer Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für das *Proton im Feld des Elektrons* gefragt. Stattdessen wird dem – beispielsweise in Ruhe befindlichen – Atom als ganzem die Wellenfunktion eines entsprechenden freien Teilchens zugeordnet. Diese wäre hier die einer reinen Schwingung der Wellenlänge  $\lambda = \infty$ . Im Unterschied dazu aber ist ein ruhendes H-Atom zweifellos lokalisierbar und kann demzufolge durch keine monochromatische Welle – auch nicht bei endlicher Wellenlänge, weil sich der Funktionsverlauf ja im gesamten Raum periodisch wiederholt – realistisch beschrieben werden. Diese paradoxe Konsequenz läßt sich innerhalb der herkömmlichen Quantenmechanik tatsächlich nur dadurch auflösen, daß die Funktion  $\chi$  als Wahrscheinlichkeitsamplitude interpretiert, und gegebenenfalls ein durch Superposition freier Lösungen gebildetes Wellenpaket herangezogen wird, das allerdings in eklatantem Unterschied zu einem sich selbst überlassenen H-Atom innerhalb einer Zeitspanne von nur  $10^{-13}$  s auf die doppelte Breite zerfließen müßte. Wenn aber ein solches Wellenpaket so offensichtlich nicht geeignet ist, ein reales H-Atom im Grundzustand hinsichtlich seiner Massen- und Ladungsverteilung angemessen zu beschreiben – mit welchen Einschränkungen kann dann das Konzept des Wellenpakets überhaupt auf andere Atome, Moleküle, Kristalle oder gar makroskopische Körper übertragbar sein? Die angesprochene BORN'sche Wahrscheinlichkeitsdeutung enthält – etwa bei der Berechnung der Streuamplitude von Neutronen – keinerlei Information über die doch meßbare Gestalt bzw. Struktur der jeweiligen Teilchen. Sie ist deshalb unvollständig.

<sup>72)</sup> s. Zusammenhang mit cgs-Systemen in Abschnitt 2

Es ist von entscheidender Bedeutung, daß der – der runden Klammer in (7,14) entsprechende – Ausdruck (7,72) im Hinblick auf die oben gemachte Voraussetzung  $m_p \rightarrow \infty$  tatsächlich verschwindet. Denn bei diesem Grenzübergang ergibt sich am Beispiel des Grundzustandes für das auf der rechten Seite von (7,14) verbliebene Integral, wie dort behauptet,

$$\lim_{m_p \rightarrow \infty} \int \frac{\tilde{\rho}_{p0}}{e} (E_{p0} - e\varphi_{e0}) dV = -\frac{e^2}{r_B} - \lim_{m_p \rightarrow \infty} \int \tilde{\rho}_{p0} \varphi_{e0} dV = 0, \quad (7,75)$$

da in diesem Fall die Ladungsdichte des Protons  $\tilde{\rho}_{p0} \approx e\chi_{p0}^2$  wegen (7,73-74) *nachträglich* durch eine  $\delta$ -Funktion darstellbar ist, und das in (7,75) am Ende auftretende Integral demzufolge den Wert

$$-\lim_{m_p \rightarrow \infty} \int \tilde{\rho}_{p0} \varphi_{e0} dV \approx -e_p \int \delta(\vec{r}) \varphi_{e0} dV = +\frac{e^2}{r_B} \quad (7,76)$$

hat. Ohne die Voraussetzung  $m_p \rightarrow \infty$  aber hätte das Protonenpotential gar nicht in der idealisierten Form des COULOMB-Potentials einer punktförmigen Ladung angesetzt werden dürfen. *Dieser Ansatz ist nur möglich in phänomenologischer Analogie zur klassischen Behandlung im Schwerpunktsystem bei gleichzeitiger Verwendung der reduzierten Masse des Elektrons.*

Das somit schließlich am Beispiel des Grundzustandes gezeigte Verschwinden des verbliebenen Integrals in (7,14) ist auch auf die angeregten Zustände übertragbar, weil das zur Ladungsverteilung des Elektrons gehörige elektrische Potential im Schwerpunkt eines fixiert gedachten Protons jedenfalls ein Extremum hat. Aus Symmetriegründen ist die Feldstärke dort Null und die Entwicklung des Potentials wird jeweils mit einer Konstanten plus quadratischen Termen in Bezug auf die drei Achsen eines kartesischen Koordinatensystems beginnen. Dabei handelt es sich allerdings z.B. im 2p-Zustand bezüglich der Symmetrieachse näherungsweise um ein *negatives* Oszillatorpotential, d.h. um Abstoßungs- statt Rückstellkräfte bezüglich der Ruhelage, doch ist auch hier wieder zu bedenken, daß die Ladungsdichte des Elektrons eben nicht ortsfest vorgegeben ist. Letztlich werden entsprechende Effekte auch hier im Grenzwert  $m_p \rightarrow \infty$  verschwinden. Dieser Schluß wurde in Abschnitt 7.2 auf ganz andere Weise bestätigt. Das aber bedeutet, daß sich am Ende immer  $E_{p\nu} \approx e\varphi_{e\nu}(0)$  ergeben wird, und darauf allein kommt es hier an.

Im folgenden wird nun deutlich, daß eine das Superpositionsprinzip einschließende Linearität der KLEIN-GORDON-Gleichungen, die ja – wie bereits in Abschnitt 6.3.c betont – jeweils *vorgegebene* Potentiale voraussetzt, durch die wechselseitigen Beeinflussungen der felderzeugenden Ladungsverteilungen strenggenommen verlorengelht, und demzufolge nur eingeschränkte Gültigkeit haben kann<sup>73)</sup>. Diese – bisher offenbar unbeachtet gebliebene – *prinzipielle* Nicht-Linearität der hinter (7,66) stehenden KLEIN-GORDON-Gleichungen tritt besonders klar zutage, wenn die quantisierten MAXWELL'schen Gleichungen (6,19) hinzugenommen werden, die im Falle der hier vorausgesetzten Stationarität näherungsweise besagen

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_p &\approx -e_p \chi_p^2, \\ \Delta \varphi_e &\approx -e_e \chi_e^2. \end{aligned} \quad (7,77)$$

Bereits am Beispiel des H-Atoms erweist sich also die Quantenmechanik als eine strenggenommen *nicht-lineare* Theorie, indem hier die SCHRÖDINGER-Gleichung des Elektrons einerseits das Protonenpotential enthält, das andererseits erst aus der Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für das Proton im Feld des Elektrons und der sich daraus ergebenden Ladungsverteilung zu berechnen wäre. Wie sich die beiden nicht-linearen Gleichungen des 3-dimensionalen Raums durch einen mathematischen Kunstgriff in *eine lineare* Gleichung des 6-dimensionalen Konfigurationsraums umwandeln lassen, soll der nächste Abschnitt 7.7 zeigen.

<sup>73)</sup> Demgegenüber bleibt die Gültigkeit des Superpositionsprinzips für das elektromagnetische Feld dadurch gewährleistet, daß es für die Zusammenfassung aller *Kraftwirkungen* auf jedes einzelne Teilchen bzw. dessen Volumenelemente Geltung hat. Denn der Ausdruck  $\vec{E} + 1/c [\vec{v} \times \vec{B}]$  – der hier als LORENTZ-Feldstärke bezeichnet sei (zur Begründung s. [2]) – ist gerade definiert als Kraft pro Ladung bzw. Kraftdichte pro Ladungsdichte.

Im Verlauf einer sukzessiven numerischen Lösung der beiden obenstehenden SCHRÖDINGER-Gleichungen aber ergibt sich für den Grundzustand des Protons beim Einsetzen des in zweiter Näherung korrigierten Elektronenpotentials in (7,70) eine Eigenfunktion wie (7,73), aus der wiederum eine nicht-punktförmige Ladungsverteilung resultiert. Das daraufhin entsprechend zu modifizierende Protonenpotential wäre dann in einer neuen SCHRÖDINGER-Gleichung für das Elektron anzusetzen und so fort. Diese Vorgehensweise führt trotz unrealistischer Voraussetzungen ortsfester Ladungsverteilungen zu einer allerdings sehr groben Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die numerischen Abweichungen einer solchen Näherung liegen nach den eben genannten drei Schritten im Prozentbereich.

Daß diese Näherungsergebnisse – wie zuvor bereits (7,72-74) – keine bessere Übereinstimmung liefern, dürfte den oben genannten Grund haben, daß es sich in der Realität letztlich immer um *nicht-statische* Potentiale handelt. Insbesondere ist, wie erwähnt, die ‚Mitbewegung‘ des Atomkerns phänomenologisch zu berücksichtigen. Nur wenn in der Natur ein Potential wie (7,70) ortsfest realisiert wäre, könnten entsprechende Lösungen Gültigkeit haben.

Deshalb kommt das *Prinzip konsistenter Felder* wohl erst im Hinblick auf die Existenz von *Molekülen* – oder auch auf einer viel tiefer liegenden Ebene – besser zum Tragen. So werden die bei analoger Behandlung im Sinne von (7,72), (7,73), (7,74) zu erzielenden Resultate eher für die Verhältnisse in einem H<sub>2</sub>-Molekül gelten, bei dem sich die beiden Protonen näherungsweise gemäß (7,70) jeweils in einem deformierten Oszillatorpotential befinden, dessen Form sich schrittweise als konsistente Kombination der *vier* beteiligten Teilchen berechnen lassen sollte. Denn daß letztlich das H<sub>2</sub>-Molekül als – gegebenenfalls angeregte – Gleichgewichtskonfiguration negativer Bindungsenergie resultieren wird, ist daraus zu ersehen, daß sich das hier skizzierte Näherungsverfahren zu dem üblicherweise angewandten weiterentwickeln läßt, was im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

Mit einer Verallgemeinerung auf andere Moleküle sollten sich diese schließlich als Prototypen der von PLANCK in seiner thermodynamischen Begründung des Strahlungsgesetzes [39] herangezogenen „Resonatoren“ deuten lassen. Nur aber aufgrund der oben besprochenen Nicht-Linearität können aus Atomen letztlich schwingungsfähige Moleküle entstehen.

Es bleiben weitere Konsequenzen daraus zu ziehen, daß die Übereinstimmung mit der Erfahrung am größten ist, wenn in den Rechnungen mittels (teilweiser) Verwendung der reduzierten Masse eine Mitbewegung des Kerns berücksichtigt wird. Demzufolge wäre es selbst für den Grundzustand des H-Atoms unzutreffend, eine statische Ladungsverteilung von Elektron und Proton im Schwerpunktsystem anzunehmen. Dagegen scheint eine Mitbewegung des Kerns trotz gewisser Einschränkungen durchaus plausibel. Denn daß bei Einfang eines Elektrons durch ein Proton das dadurch entstandene H-Atom vollkommen frei von Vibrationen sein könnte, ist realistischere Weise nicht anzunehmen.

Die Gestalt des Protons – bei dem es sich jedenfalls nicht um ein ausdehnungsloses Teilchen handelt – ist in Wirklichkeit natürlich weitgehend unabhängig von Elektronen der Atomhülle. Daraus folgt die Notwendigkeit einer Vertiefung des hier entwickelten Konzepts, da dieses bisher keine Bestimmung der Gestalt *lokalisierbarer freier* Teilchen erlaubt. Andererseits muß jede Erweiterung an der Gültigkeit der relativistischen SCHRÖDINGER-Gleichung festhalten, die sich deshalb im Falle der herkömmlichen Behandlung des H-Atoms tatsächlich nur statistisch deuten läßt. Doch sollte eine detailliertere Beschreibung von Proton (und Neutron) im Rahmen des vorliegenden Konzepts durch Einführung nicht-elektrodynamischer Potentiale möglich werden. Die Notwendigkeit einer Vertiefung des Konzepts mag aus dieser Sicht zugleich als Hinweis auf die Existenz kurzreichweitiger Kräfte – wie z. B. der Starken (oder Schwachen) Wechselwirkung – zu verstehen sein.

Obwohl die Methode vollständig konsistenter Felder bei Voraussetzung zeitunabhängiger Potentiale von Elektron und Proton im H-Atom nicht zu perfekten Ergebnissen führen kann, läßt sich auf diesem Wege eine ungefähre Übereinstimmung mit den seit langem wohlbekannten Erfahrungstatsachen erzielen. Es ist dabei von grundsätzlicher Bedeutung, daß hier erstmals der konsistente Energie-Impuls-Tensor eines räumlich lokalisierten, elektrisch insgesamt neutralen, zeitweilig abgeschlossenen Systems auftritt, wobei die Bezeichnung konsistent als vollständig im Sinne der geltenden Voraussetzungen zu verstehen ist.

Wo aber die reine Deduktion an ihre Grenzen stößt, kommt es zunächst darauf an, der experimentellen Erfahrung gegebenenfalls *phänomenologisch* Rechnung zu tragen und hinsichtlich der gewiß angebrachten Ent-

wicklung eines praktikablen Verfahrens die richtigen Schlüsse zu ziehen<sup>74)</sup>. In einer späteren Arbeit soll explizit dargelegt werden, wie sich die in diesem Abschnitt zutage getretenen Probleme besser verstehen und schließlich doch deduktiv lösen lassen.

## 7.7 Der Übergang zur Mehrteilchen-Wellengleichung im Konfigurationsraum

Für geladene Teilchen im wechselseitigen Potentialfeld sei hier der Übergang von dem nicht-linearen Gleichungspaar (7,66) zu *einer* einfachen linearen Näherungsgleichung im Konfigurationsraum angegeben. Dies widerlegt vom Ansatz her gleichzeitig HEISENBERGS gegen SCHRÖDINGER vorgebrachten Einwand, daß sich atomare Prozesse nicht im realen dreidimensionalen, sondern nur in einem 3N-dimensionalen Konfigurationsraum abspielen können<sup>75)</sup>. Die Mehrteilchen-Wellengleichung wird hier am Beispiel des H-Atoms abgeleitet als eine mathematische *Annäherung*, die allerdings den experimentell gewonnenen Beobachtungstatsachen deutlich besser Rechnung trägt als die Vorgehensweise des vorausgegangenen Abschnitts. Die Gleichungen (7,66) lauten in zeitabhängiger Form

$$\begin{aligned} \alpha) \quad i\hbar \dot{\chi}_e &\approx -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \chi_e + e_e \varphi_p \chi_e, \\ \beta) \quad i\hbar \dot{\chi}_p &\approx -\frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta \chi_p + e_p \varphi_e \chi_p. \end{aligned} \quad (7,78)$$

Die Energie eines *insgesamt* stationären H-Atoms ist entsprechend (7,13), (6,62) nach Abzug der Ruhenergie von Elektron und Proton

$$E_{(H)} \approx \int \left[ -\frac{\tilde{\rho}_e}{e_e} \dot{\sigma}_e + \frac{\tilde{\rho}_p}{e_p} (-\dot{\sigma}_p - e_p \varphi_e) \right] dV, \quad (7,79)$$

wobei hier realistischerweise auf die Forderung verzichtet wird, daß die Wellenfunktionen von Elektron und Proton *jede für sich* stationär im Sinne der Definition (6.50) sein sollen. Als Lösung von (6,19) in SCHRÖDINGER-Näherung gilt

$$\varphi_e := e_e \int \frac{|\chi_e|^2}{|\vec{r}_p - \vec{r}_e|} dV_e. \quad (7,80)$$

Mit Unterscheidung und entsprechender Indizierung der Variablen von Elektron und Proton läßt sich (7,79) nach partieller Integration der ersten beiden Summanden und Multiplikation derselben mit  $|\chi_p|^2$  bzw.  $|\chi_e|^2$  zusammenfassend auch schreiben als (die Integralwerte von  $|\chi_p|^2$  bzw.  $|\chi_e|^2$  sind dort jeweils gleich Eins)

$$E_{(H)} \approx \iint \left( \frac{\hbar^2}{2m_e} |\chi_p|^2 \bar{\nabla} \chi_e^* \bar{\nabla} \chi_e + \frac{\hbar^2}{2m_p} |\chi_e|^2 \bar{\nabla} \chi_p^* \bar{\nabla} \chi_p + \frac{e_e e_p}{|\vec{r}_e - \vec{r}_p|} |\chi_p|^2 |\chi_e|^2 \right) dV_p dV_e \stackrel{!}{=} konst|_t. \quad (7,81)$$

Mit Einführung des komplexen Skalars  $\chi(\vec{r}_p, \vec{r}_e) \equiv \chi_p(\vec{r}_p) \chi_e(\vec{r}_e)$ , der zunächst im 6-dimensionalen Konfigurationsraum definiert ist, entsteht durch Variation die auf beliebig viele Teilchen erweiterbare Gleichung

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_e \chi + \frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta_p \chi + \left( E_{(H)} - \frac{e_e e_p}{|\vec{r}_e - \vec{r}_p|} \right) \chi = 0. \quad (7,82)$$

<sup>74)</sup> Im Hinblick auf die oben aufgezeigte grundsätzliche Nicht-Linearität gilt dies auch in einer erweiterten Theorie, die z. B. möglichen Spineffekten – d.h. dem Phänomen der Polarisation bzw. den durch die Existenz von Eigendrehimpulsen verursachten mechanischen Korrekturen – Rechnung trägt.

<sup>75)</sup> HEISENBERGS gelegentlich geäußerte Auffassung, daß sich gewisse atomare Prozesse „außerhalb von Raum und Zeit“ abspielen, verstehe ich so, daß diese von der Quantenmechanik nicht im Detail beschrieben werden können. Verglichen mit der historischen Entwicklung erfolgt der Übergang zwischen dreidimensionalem und Konfigurationsraum hier gerade in umgekehrter Richtung.

Die Indizes der Operatoren  $\Delta_p$  und  $\Delta_e$  weisen darauf hin, daß diese nur auf die Koordinaten des Protons bzw. Elektrons anzuwenden sind. Ein charakteristisches Merkmal der so gewonnenen Gleichung (7,82) liegt darin, daß hier die klassische potentielle Energie geladener Punktteilchen vom ‚relativen Abstand‘  $|\vec{r}_e - \vec{r}_p|$  aufzutreten scheint. Das ist verblüffend, weil bei der Ableitung nirgendwo die Existenz solcher Teilchen vorausgesetzt wurde. *Umgekehrt aber läßt sich aus der Gültigkeit der Gleichung (7,82) keineswegs schließen, daß diese punktförmige Teilchen beschreibt!*

Die im Konfigurationsraum definierte Gleichung (7,82) ist im Gegensatz zum Gleichungspaar (7,78) ohne weiteres linear. Die so gewonnene Linearität bringt wiederum die Gültigkeit des Superpositionsprinzips mit sich. Daß die Bestimmung der stationären Zustände der SCHRÖDINGER-Gleichung in der Form (7,82) nun auf das fundamentale Eigenwertproblem führt, dessen Lösungen ein vollständiges Orthonormalsystem bilden<sup>76)</sup>, erlaubt schließlich, alle realen Gegebenheiten durch Superposition stationärer Zustände abzubilden.

Ganz offensichtlich bietet sich die Ausdehnung dieses Näherungsverfahrens auf die Wechselwirkung beliebig vieler Teilchen, sowie die Einbeziehung der zugehörigen Vektorpotentiale gemäß (6,66) geradezu an (im Zusammenhang dieses gesamten Abschnitts 7.7 s. z. B. [40] oder die neuere Darstellung [41]).

Soll die hier neu begründete SCHRÖDINGER-Gleichung im Konfigurationsraum (7,82) nun speziell für Elektron und Proton des H-Atoms gelöst werden, so läuft dies üblicherweise auf den mathematischen Kunstgriff hinaus, daß in der die ‚richtigen‘ Energieeigenwerte liefernden Gleichung (7,78- $\alpha$ ) die reduzierte Masse des Elektrons zusammen mit der  $1/r$ -Idealisierung des COULOMB-Potentials zu verwenden ist. Ein wesentlicher Unterschied zur Behandlung des vorherigen Abschnitts 7.6 liegt dabei darin, daß sich dort das H-Atom in grundsätzlicher Übereinstimmung mit der Erfahrung lokalisieren läßt, während dies hier nicht möglich scheint. Beide Bilder lassen sich allerdings vereinbaren durch die Verabredung, daß Ortsangaben nur als Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zu deuten sind.

Doch im Unterschied zur KOPENHAGENER Auffassung bedeutet die oben auftretende Nichtlokalisierbarkeit aus meiner Sicht lediglich, daß einem im 3-dimensionalen Raum befindlichen freien H-Atom vor der Messung kein *bevorzugter* Aufenthaltsort zuzuschreiben ist, wohl aber eine konkrete, jederzeit lokalisierbare Gestalt<sup>77)</sup>.

Daß auf diese Weise die beste Übereinstimmung mit der Erfahrung erzielt wird, zeigt meines Erachtens noch einmal, daß die Ladungsverteilung von Elektron und Proton selbst in den stationären Zuständen des einfachsten aller Atome nicht statisch sein kann. Die am Ende von Abschnitt 7.3 angedeuteten Fluktuationen der Ladungsverteilung aber müssen nicht notwendigerweise zur Ausstrahlung von Energie und Impuls führen (s. u. Fußn. 67); eine dementsprechende Möglichkeit ‚virtueller Photonen‘ wird in Abschnitt 8.2 näher begründet. Um allerdings von den inneren Vorgängen im H-Atom ein genaueres Bild zu ergeben, ist diese vorläufige Skizze der grundsätzlichen Zusammenhänge noch zu grob. Andererseits aber kann auch kein Zweifel bestehen, daß insbesondere während der Übergänge, die von Emission oder Absorption elektromagnetischer Strahlung begleitet werden, sowohl Elektron als auch Proton gegenüber dem gemeinsamen Schwerpunktsystem in Bewegung sind.

Es ist klar, daß alle Kenntnisse über mikroskopische Details wie die jeweilige ‚Mitbewegung‘ eines Atomkerns – deren behelfsmäßige Berücksichtigung ja bereits zur Bestimmung der Energiewerte in stationären Zuständen des H-Atoms erforderlich ist – nur statistisch gewonnen werden können und deshalb zwangsläufig unvollständig bleiben müssen. Das schließt nicht aus, von der herkömmlichen Quantenmechanik eines Tages sagen zu können, *daß jene die Wirklichkeit zwar nur unvollständig, unser Wissen darüber aber vollständig zu beschreiben vermag*. Bei der hier zu entwickelnden Theorie verhält es sich vom Ansatz her gerade umgekehrt.

Es sei abschließend angemerkt, daß die Mehrteilchen-Wellengleichung selbstverständlich in allen konkreten Fällen vom 3N-dimensionalen Konfigurationsraum in den gewöhnlichen 3-dimensionalen Raum zurückführt, denn genau dort spielt sich jedes physikalische Geschehen ab – und nur dort lassen sich Aussagen der Theorie experimentell überprüfen.

<sup>76)</sup> Im Falle der Entartung ist das bekannte Orthogonalisierungsverfahren anzuwenden.

<sup>77)</sup> ... was von Unbeirraren wie EINSTEIN und SCHRÖDINGER immer wieder vertreten, von den Anhängern der Kopenhagener Schule aber vehement bestritten wurde. Ich denke, hieran wird erkennbar, daß die historisch gewachsene Quantenmechanik – in berechtigtem Interesse praktikabler Physik, wenn auch vielleicht unbewußt – von vornherein auf eine vollständige raum-zeitliche Beschreibung der atomaren Prozesse zugunsten statistischer Anwendbarkeit verzichtet hat

## 8. Ansatz zu einer modifizierten Elektrodynamik

Die in Abschnitt 5.1 besprochene Unvollständigkeit der LORENTZ'schen Elektronentheorie hat von Anfang an, wie POINCARÉ bei der Diskussion eines nun gegenstandslos gewordenen Modells erkannte, die Notwendigkeit einer Erweiterung der herkömmlichen Elektrodynamik mit sich gebracht. In den vorausgegangenen Abschnitten hat sich nun die Quantenmechanik als natürliche Erweiterung der Elektrodynamik herausgestellt. Umgekehrt impliziert dies allerdings eine Einschränkung der historisch gewachsenen Modellvorstellungen, wovon insbesondere das Bild der elektromagnetischen Wellen betroffen ist.

Ein Blick auf das konsistente Variationsprinzip (6,1-3) genügt um zu zeigen, daß sich die daraus folgende erweiterte Elektrodynamik von der ebenfalls darin enthaltenen Quantenmechanik nicht streng trennen läßt. Es ist deshalb immer im Auge zu behalten, daß jede Zuordnung eines Phänomens zu dem einen oder anderen Bereich eine grundsätzliche Vereinfachung beinhaltet, deren Zulässigkeit jeweils einer eigenen Prüfung bedarf.

Gerade die Quantenelektrodynamik gilt hinsichtlich der numerischen Präzision ihrer Ergebnisse als erfolgreichste physikalische Theorie der letzten Jahrzehnte überhaupt. Es wird interessant sein, zukünftig herauszufinden, ob und inwieweit sich das hier skizzierte deduktive Konzept auch mit dieser historisch gewachsenen Theorie vereinbaren läßt. Im vorliegenden Abschnitt aber sollen lediglich einige Grundtatsachen besprochen werden, welche einerseits die konzeptionellen Unterschiede zur konventionellen Elektrodynamik aufzeigen, andererseits aber auch die annähernde Verbindung herstellen.

### 8.1 Die LORENTZ-Kraft als Wechselwirkung zwischen *verschiedenen* Teilchen

Das konsistente Variationsprinzip (6,1-3) ist im Hinblick auf die resultierende Ableitung der fundamentalen Energie-Frequenz-Beziehung so konzipiert, daß daraus keine Selbstkräfte bzw. divergente Selbstenergien folgen können. Die in der etablierten Quantenelektrodynamik allgemein gebräuchliche Renormierung erweist sich hier als überflüssig. Diese Vorgehensweise entspricht der eingangs erwähnten Forderung PAULIS, die sich allerdings nur auf die elektrodynamische Wechselwirkung massiver Teilchen bezog, nicht aber auf das freie elektromagnetische Feld.

Für den dabei interessierenden Anteil des Energie-Impuls-Tensors (7,20) eines geladenen Teilchens im quellenfreien Bereich eines vorgegebenen elektromagnetischen Feldes gilt in Analogie zu (6,97) der Ausdruck

$$\lambda_i^k = -\left(F_{il}f^{kl} + F^{kl}f_{il}\right) + \frac{1}{2}\delta_i^k F_{lm}f^{lm}. \quad (8,1)$$

Mit Rücksicht auf (6,103) und (7,23) folgt sofort die im Sinne der Feldstärkendefinition richtige Kraftdichte

$$\partial_k \lambda_i^k = -F_{ik} \tilde{j}^k, \quad (8,2)$$

weil sich daraus durch Integration die LORENTZ-Kraft als reine *Wechselwirkung* ohne jede Rückwirkung des Teilchenfeldes  $f_{ik}$  auf seine eigene Quelle ergibt. Dies gilt unter der Voraussetzung, daß die äußere Feldstärke  $F_{ik}$  über die Abmessungen der durch  $\tilde{j}^k$  beschriebenen Ladungsverteilung hinweg als hinreichend konstant angesehen werden kann.

Wenn sich das Problem der Selbstenergie aber so einfach vermeiden läßt<sup>78)</sup>, was hat dann verhindert, die Elektrodynamik längst entsprechend zu modifizieren? Tatsächlich tritt ein *neues* Problem auf, das die Energie eines freien elektromagnetischen Feldes betrifft und auf den ersten Blick das ganze hier entwickelte Konzept in Frage stellt. Aus (8,1) ist nämlich – ebenso wie bereits aus (6,97) – ersichtlich, daß dem elektromagnetischen Feld  $f_{ik}$  des einzelnen Teilchens für sich allein genommen weder Energiedichte noch Energieströmung zukommt. Und zwar müßte dies für alle Raumbereiche gelten, in denen das ‚äußere‘ Feld  $F_{ik}$  verschwindet. Wie aber läßt sich eine solche Schlußfolgerung vereinbaren mit der unbestreitbaren Existenz elektromagnetischer Strahlung?

---

<sup>78)</sup> Die Vermeidung divergenter Selbstenergiebeiträge durch Einschränkung der Elektrodynamik auf die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Teilchen war bei der Komposition des Variationsprinzips allerdings nicht das ausschlaggebende Motiv. Sie hat sich gewissermaßen von selbst eingestellt, nachdem es anders nicht möglich war, einen konsistenten Energie-Impuls-Tensor zu gewinnen, der den Erhaltungssätzen (4,1) genügt.

## 8.2 Das Photon im Hinblick auf ein modifiziertes Modell elektromagnetischer Wellen

Aus den insbesondere in den Abschnitten 7.1, 7.4 und 7.7 abgeleiteten Ergebnissen ist bereits hervorgegangen, daß Licht in Energiequanten emittiert und absorbiert wird, wobei während der jeweiligen Prozesse ein elektromagnetisches Wellenfeld existiert, dessen Frequenz  $\omega$  mit der Energie  $\varepsilon$  in der fundamentalen PLANCK'schen Beziehung  $\varepsilon = \hbar \omega$  steht. Das Problem ist nun aber, daß dem beliebigen Feld eines *einzelnen* geladenen Teilchens überhaupt keinerlei Energiedichte entspricht.

Ein geladenes Teilchen bewege sich beispielsweise auf einer Kreisbahn im homogenen Magnetfeld. Die äußere elektrische Feldstärke sei dementsprechend gleich Null. Der damit insgesamt vorgegebene Feldstärketensor  $F_{ik}$  ist in sehr guter Näherung realisierbar. Das Feld  $f_{ik}$  des Teilchens ändert sich infolge der Kreisbewegung periodisch, in hinreichend großen Entfernungen breitet es sich aus als transversale elektromagnetische Welle. Es sei zusätzlich vorausgesetzt, daß das äußere Feld  $F_{ik}$  außerhalb der nahen Umgebung des Magnetfelds verschwinde. Dann würde das elektromagnetische Wellenfeld dort weder Energie noch Impuls transportieren. Denn nach (8,1) wäre die Energiedichte mitsamt der Energieströmung in solchen Raumbereichen gleich Null.

Im Vergleich mit der konventionellen Elektrodynamik scheint dies ein fatales Ergebnis. Bei näherem Hinsehen aber zeigt sich, daß der gezogene Schluß auf einer grundsätzlich falschen Voraussetzung beruht. Denn mit Rücksicht auf das konsistente Variationsprinzip (6,1-3) kann es einerseits weder ein absolut homogenes Magnetfeld geben, in dem sich ein einzelnes Teilchen bewegt, noch andererseits einen absolut feldfreien Raum, weil dessen Umgebung – oder überspitzt formuliert, der ‚Rest‘ des Universums – notwendigerweise eine entgegengesetzt gleiche Ladung trägt. Außerdem handelt es sich bei den Ausdrücken (8,1) bzw. (7,20) um Näherungen, deren Brauchbarkeit für jede Situation exemplarisch zu prüfen ist.

Grundsätzlich sind vor allem zwei Situationen zu unterscheiden. Im ersten Fall möge es sich tatsächlich um die Beschreibung eines einzelnen Teilchens in einem äußeren Feld handeln. Dann kann dieses Feld *annähernd* vorgegeben werden, wie oben am Beispiel des H-Atoms gezeigt wurde. Die dort skizzierte Behandlung ergibt dann, daß bei Übergängen zwischen stationären Zuständen elektromagnetische Wellenfelder emittiert oder absorbiert werden, deren Frequenz gemäß (7,38) durch das jeweilige Energiequantum bestimmt ist, das dem Unterschied zwischen den Energiewerten des H-Atoms vor und nach dem Übergang entspricht. Entscheidend ist nun, daß während eines Übergangs keinesfalls nur die Ladungsverteilung des Elektrons in eine harmonische Schwingung geraten wird. Der experimentell gesicherte Effekt der Mitbewegung des Atomkerns beweist, daß das Proton gerade mit entgegengesetzt gleichem Impuls schwingen muß. Entgegengesetzt gleiche Impulse bedeuten aber bei entgegengesetzt gleichen Ladungen gleichgerichtete Ströme, deren Stärken sich zwar umgekehrt wie die Massen verhalten, die aber mit gleicher Frequenz und – infolge der kleinen Abmessungen des H-Atoms – annähernd phasengleich oszillieren. Wird nun aber anstelle von (8,1) der entsprechende Anteil

$$L_{i(H)}^k = -f_{il}^p f_e^{kl} - f_{il}^e f_p^{kl} + \frac{1}{2} \delta_i^k f_e^{lm} f_{lm}^p \quad (8,3)$$

des Energie-Impuls-Tensors (7,8) zugrundegelegt, so treten darin Produkte von Feldstärken auf, die bis auf einen positiven konstanten Faktor näherungsweise<sup>79)</sup> einander gleich sind

$$f_{ik}^p \approx \frac{m_e}{m_p} f_{ik}^e, \quad (8,4)$$

und in Konsequenz des Energie-Impuls-Postulats die Erfüllung der fundamentalen Erhaltungssätze (4,1) gewährleisten. Nach Definition einer effektiven Feldstärke  $f_{ik}$  gemäß

$$f_{ik} \approx \sqrt{\frac{2m_e}{m_p}} f_{ik}^e \approx \sqrt{\frac{2m_p}{m_e}} f_{ik}^p \quad (8,5)$$

läßt sich (8,3) in einer der konventionellen Elektrodynamik entsprechenden Form schreiben als

<sup>79)</sup> Es ist klar, daß es sich hier nur um eine erste grobe Annäherung an das reale Geschehen handelt, die lediglich einen grundsätzlichen Zugang zum Verständnis solcher Abläufe zeigen soll.

$$L_{i(H)}^k = -f_{il}f^{kl} + \frac{1}{4}\delta_i^k f_{lm}f^{lm}. \quad (8,6)$$

Es ist nun von großer Bedeutung, daß bei konkreten Messungen letztlich immer nur ein Austausch von *Energie* und *Impuls* mit dem Meßgerät registriert wird<sup>80)</sup>, worauf SCHRÖDINGER – wie von SOMMERFELD [40] berichtet – in anderem Zusammenhang hingewiesen hat. Dies betrifft insbesondere auch die Messung der elektromagnetischen Feldstärken. Deshalb läßt sich auf diese Weise zwischen (8,3) und (8,6) experimentell nicht unterscheiden.

Trotzdem sind zu dem beim Übergang im H-Atom ausgestrahlten Wellenzug einige Aussagen möglich. Die aus der Berechnung der nichtverschwindenden Dipolmomente

$$e\bar{\vec{x}} \equiv e\bar{\vec{X}} = e \int \bar{\vec{x}} |\psi|^2 dV \quad (8,7)$$

mit  $\psi = \sum \psi_n$  resultierenden Auswahlregeln verlangen nämlich, daß sich die Bahndrehimpulsquantenzahl des H-Atoms bei einem solchen Übergang um  $\Delta l = \pm 1$  ändert. Wenn sich dabei zugleich die magnetische Quantenzahl um  $\Delta m = \pm 1$  ändert, dann hat das ausgestrahlte Wellenfeld die entsprechende Drehimpulsdifferenz mitzunehmen<sup>81)</sup>. Andererseits läßt sich unter Einbeziehung der konventionellen Elektrodynamik die ungefähre Dauer eines solchen Übergangs abschätzen. Zusammengenommen determinieren beide Informationen den die Energie  $\Delta\epsilon$  tragenden ausgestrahlten Wellenzug auf ein endliches Volumen, eine Frequenz  $\omega = \Delta\epsilon/\hbar$  und einen Drehimpuls  $\hbar$ , was angesichts eines Stoßparameters in der Größenordnung des BOHR'schen Radius  $r_B \ll \lambda$  auf eine Wirbelstruktur hindeutet, dessen Drehimpuls demzufolge ganz überwiegend als Eigendrehimpuls  $\hbar$  zu verstehen ist. Möglicherweise also existieren elektromagnetische ‚Wellen‘ nur in Form abgelöster Wirbel, wobei das Feld *selbst* das Medium solcher Strukturen zu sein hätte. Dieses sich aus dem hier zugrundegelegten klassischen Konzept gewissermaßen von selbst abzeichnende Bild – obwohl in den soeben angesprochenen Details längst nicht durchgängig stimmig – weist wesentliche Merkmale des Photons auf, wenn hinzugenommen wird, daß dieses wie jede andere elementare Struktur immer als Ganzes reagiert.

Der hier am Beispiel des H-Atoms besprochene Sachverhalt scheint grundsätzlich auch auf die oben erwähnte Bewegung eines einzelnen geladenen Teilchens im ‚homogenen‘ Magnetfeld übertragbar. Wenn es sich bei diesem z.B. um ein Elektron handelt, dann trägt dessen Umgebung immer die Gesamtladung  $+e$ , woraus bereits folgt, daß im Unterschied zu der oben versuchsweise gemachten Voraussetzung die äußere elektrische Feldstärke nicht Null sein kann. Ebenso wenig kann die magnetische Feldstärke streng homogen sein. In Wirklichkeit setzt sie sich aus sehr vielen nicht-statischen Einzelbeiträgen zusammen, sodaß auch hier nicht-verschwindende Produkte von Feldstärken auftreten werden.

In dem bisher besprochenen ersten Fall der beiden grundsätzlich zu unterscheidenden Situationen geht es also wie bei der Schwingungen eines Elektrons gegen den Atomkern um Emission oder Absorption einzelner Photonen. Im zweiten Fall aber geht es um eine statistische Gesamtheit von gleichartigen Teilchen. Im Hinblick auf den allgemeinen Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes, hier in der zu (6,97) alternativ sortierten Form

$$L_{ik}^K \equiv -\frac{1}{2} \left( f_{im}^K f_k^{Km} + f_{km}^K f_i^{Km} \right) + \frac{1}{4} \eta_{ik} f_{lm}^K f_K^{lm}, \quad (8,8)$$

ist sofort klar, daß nicht-verschwindende Produkte von Feldstärken darin deshalb auftreten, weil benachbarte geladene Teilchen in einem vorgegebenen äußeren Feld hinsichtlich Frequenz und Phase annähernd gleichbeschaffene Wellenfelder ausstrahlen werden. Auf diese Weise dürften dann statistische Gesamtheiten von Photonen entstehen, wie insbesondere aus den Kombinationen der Felder von Elektronengruppen in einem HERTZschen Dipol.

Es sei noch ausdrücklich der hier besonders klar hervortretende Aspekt betont, daß sich bei der Superposition elektromagnetischer Felder die mikroskopischen Feldstärken von Elektron und Proton keineswegs linear zu der effektiven Feldstärke (8,5) *addieren*. Tatsächlich nämlich werden alle Kraftwirkungen auf einen makroskopischen Körper durch vektorielle Addition zusammengefaßt, wodurch sich im Einklang mit (8,5) auch allgemein

<sup>80)</sup> Diese Aussage läßt sich dahingehend verschärfen, daß jeder Meßprozeß mit dem Austausch von – gegebenenfalls auch ruhmassebehafteten – Teilchen einhergeht.

<sup>81)</sup> Der im Verhältnis  $m_e/m_p$  stehende Beitrag des Kerns zum Drehimpuls des H-Atoms wird hier vernachlässigt.

effektive Feldstärken definieren lassen sollten, mit denen dann näherungsweise wie üblich gerechnet werden kann.

Im Hinblick auf das hier modifizierte Konzept elektromagnetischer Wellen bleibt schließlich vor allem festzuhalten a) die bei atomaren Übergängen jeweils ausgestrahlte Energiemenge ist determiniert durch die Frequenz der entsprechenden Strahlung und umgekehrt; b) das elektromagnetische Feld eines einzelnen Elementarteilchens trägt für sich allein genommen weder Energie noch Impuls.

Seit EINSTEINS „revolutionärer“ Einführung des Photons [42] als Konsequenz aus dem PLANCK'schen Strahlungsgesetz ist die Frage offen, warum sich Licht nicht nur nicht durchgängig als ein Phänomen der konventionellen Elektrodynamik beschreiben läßt, sondern hinsichtlich „Erzeugung und Verwandlung“ zu dieser in eklatantem Widerspruch steht. Im Hinblick auf die hier konzipierte erweiterte Elektrodynamik besteht dieser grundsätzliche Widerspruch nicht mehr. Das heißt natürlich nicht, daß alle diesbezüglichen Probleme gelöst wären. Das soeben grob umrissene Modell eines Photons soll vor allem zeigen, daß es nicht – wie von einigen Begründern der Quantenmechanik ursprünglich unterstellt – sinnlos sein muß, nach physikalisch angemessenen Bildern<sup>82)</sup> realer Objekte zu fragen.

In diesem Zusammenhang sei auch auf einige weitere Aspekte der hier vorläufig entwickelten Vorstellungen hingewiesen. Würde beispielsweise eine in einem kleinen Raumbereich näherungsweise realisierte monochromatische ebene Welle mit einer gleichartigen, aber um den Betrag  $\pi$  phasenverschobenen zusammentreffen, so wäre die zugehörige Energiedichte gemäß (8,8) negativ. Ist aber die Annahme, daß zwei entsprechende Felder auf diese Weise zusammentreffen können, überhaupt erlaubt?

Auch in Beziehung auf die am Ende des Abschnitts 7.2 getroffene Feststellung, daß es selbst für den Grundzustand des H-Atoms unzutreffend scheint, im Schwerpunktsystem eine statische Ladungsverteilung von Elektron und Proton anzunehmen, eröffnen sich hier neue Perspektiven. Eine unsymmetrisch und chaotisch fluktuierende Ladungsverteilung ohne Ausstrahlung elektromagnetischer Energie ließe sich nämlich so verstehen, daß das fluktuierende Feld des Elektrons mit dem des Protons hier nicht in Phase schwingen kann. Gerade deshalb wäre in einem solchen Fall gemäß (8,8) keine Energieausstrahlung möglich. Damit aber stellt sich sofort die Frage, ob in einem solchen Phänomen nicht möglicherweise das zu sehen sein könnte, was gemeinhin als das Auftreten virtueller Photonen bezeichnet wird. Dabei wäre grundsätzlich durchaus nachvollziehbar, wie es unter Umständen trotzdem zu einem realen Energieaustausch mit anderen Teilchen kommen kann.

### 8.3 Der näherungsweise Übergang zu einer relativistischen Punktmechanik

Eine relativistische Punktmechanik konnte es unter Einbeziehung einer potentiellen Energie im Sinne der klassischen Physik nie geben. Als halbklassische Näherung aber folgt eine im Hinblick auf die Wechselwirkung verschiedener Teilchen modifizierte LORENTZ'sche Elektrodynamik – ohne eine nicht beobachtbare Rückwirkung des Feldes auf die jeweils erzeugenden Elementarladungen – nach formalem Übergang  $\hbar \rightarrow 0$  unmittelbar aus dem konsistenten Variationsprinzip (6,1-3). Für denjenigen Anteil der Wirkungsdichte, der einem herausgegriffenen Teilchen K zuzuschreiben ist, ergibt sich dabei näherungsweise

$$S_{\hbar \rightarrow 0}^{(\text{halbklassisch})} = \int \left[ \sum_K \left( \frac{1}{4} \mathbf{f}_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}} - \frac{1}{2m_K} q_K^2 \tilde{s}_K^l \tilde{s}_l^K + \frac{1}{2} \mathbf{m}_K c^2 q_K^2 \right) + \frac{1}{2\kappa} \mathbf{G} \right] d\Omega. \quad (8,9)$$

In diesem Fall aber führt die Variation nach der Skalarfunktion  $q_K$  aufgrund der Vernachlässigung des  $q_K^l q_l^K$ -Terms gerade zur ‚klassischen‘ HAMILTON-JACOBI-Gleichung

$$\left( s_K^l + \frac{e_K}{c} a_K^l \right) \left( s_l^K + \frac{e_K}{c} a_l^K \right) = m_K^2 c^2 \quad (8,10)$$

für geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld (s. a. Abschn. 5.3). Und zwar tritt diese, wie bereits erwähnt, an die Stelle der reellen Wellengleichung (6,27), dadurch daß deren linke Seite nun nach den Voraussetzung die-

<sup>82)</sup> Tatsächlich denke ich, daß es unmöglich ist Physik zu treiben, ohne dabei auch bildhafte Vorstellungen zu entwickeln – und seien diese auch noch so abstrakt.

ser Näherung verschwindet. Aufgrund des Korrespondenzprinzips ist der dabei benutzte formale Übergang  $\hbar \rightarrow 0$  umso eher berechtigt, je größer die Quantenzahlen der superponierten Zustände sind.

Die soeben angegebene Näherung entspricht nicht der historischen Entwicklung der konventionellen Elektrodynamik. Es ist in diesem Zusammenhang interessant, das zuerst von WEYL [13] angegebene Wirkungsintegral

$$S_{\text{WEYL}} = \frac{1}{4} \int \mathbf{F}^{ik} F_{ik} d\Omega + \sum \frac{e_0}{c} \int A_i dx^i + \sum m_0 c \int ds + \frac{1}{\kappa} \int \mathbf{G} d\Omega, \quad (8,11)$$

aus welchem nach der bis heute üblichen Vorgehensweise die LORENTZ'sche Elektrodynamik abgeleitet wird, zu einem direkten Vergleich mit dem verkürzten konsistenten Variationsprinzip (8,9) heranzuziehen. Es ist offensichtlich, daß sich WEYLs Wirkungsintegral aus letzterem ebenfalls näherungsweise gewinnen läßt, indem *vor der Variation* eine teilweise Integration von (8,9) ausgeführt wird. Im Unterschied zur bisherigen Auffassung folgt dabei aber sogleich, daß in (8,11) aus dem Skalar  $F_{ik} F^{ik}$  alle Produkte herauszunehmen sind, die sich auf das Feld ein und desselben Teilchens beziehen. Außerdem wäre das bei WEYL auftretende  $A_i$  als erweitertes Potential  $\tilde{A}_i$  im Sinne von (5,12), (5,13) zu verstehen. Es ist bemerkenswert, daß der WEYL'sche Ausdruck wegen der jeweils zugrundeliegenden Begriffsbildungen meines Erachtens problematischer ist als das verkürzte Integral (8,9), das sich aus (6,1-3) ergeben hat.

Analog zur Ableitung des Energie-Impuls-Tensors nicht wechselwirkender Materie (6,91) ist es zusätzlich möglich, nun eine weniger grobe Näherung durchzuführen, welche die elektromagnetischen Anteile beibehält. Um auch daraus die Bewegungsgleichungen (5,4) der MAXWELL-LORENTZ'schen Elektrodynamik näherungsweise zu erhalten, genügt es, in (6,87) wiederum den formalen Übergang  $\hbar \rightarrow 0$  durchzuführen mit dem Ergebnis

$$\mathbf{T}_{ik}^{\text{L (halbklassisch)}} \approx \left( -f_{im}^{\text{L}} \mathbf{f}_k^{\text{L}m} + \frac{1}{4} g_{ik} f_{lm}^{\text{L}} \mathbf{f}_L^{\text{L}m} \right) + \frac{1}{m_L} q_L^2 s_i^{\text{L}} s_k^{\text{L}}. \quad (8,12)$$

Nach Summenbildung über L entspricht dieser Ausdruck gerade dem konventionellen Energie-Impuls-Tensor (5,3). Mit Rücksicht auf die HAMILTON-JACOBI-Gleichung (8,10) beinhaltet die Forderung (4,1) – daß nämlich bezüglich frei fallender Inertialsysteme die Vierer-Divergenz des Energie-Impuls-Tensors verschwinde – schließlich die Bewegungsgleichungen (5,4) der MAXWELL-LORENTZ'schen Theorie, wodurch die Umsetzung der Resultate des Abschnitts 5 noch einmal verifiziert ist. Das Besondere daran ist wieder, daß hier keine Selbstkräfte auftreten, sondern jedes geladene Teilchen nur von den Feldern aller anderen Teilchen beeinflusst wird.

Damit ist gezeigt, daß die soeben angegebene Näherung (8,12) des quantenmechanischen Energie-Impuls-Tensors (6,86-87) das halbklassische Verhalten atomar aufgebauter makroskopischer Körper zu beschreiben gestattet. Dieser Sachverhalt läßt sich umgekehrt auch als Bestätigung der EHRENFEST'schen Sätzen der konventionellen Quantenmechanik verstehen.

## 9. Zur Gravitation

Eine Beschreibung des Zusammenspiels von Elektrodynamik und Quantenmechanik mit der Gravitation ergibt sich grundsätzlich aus der Möglichkeit, den ursprünglich aus der speziellen Relativitätstheorie hervorgegangenen – dort in der Form  $\eta_{ik}$  konstanten – Fundamentaltensor  $g_{ik}$  als Funktion von Raum und Zeit zu betrachten. In Abschnitt 6.4 wurden auf diese Weise die EINSTEIN'schen Gravitationsgleichungen einschließlich eines assoziierten Energie-Impuls-Tensors der quantisierten Materie aus dem konsistenten Variationsprinzip (6,1-3) abgeleitet.

Mit Bezug auf die Elektrodynamik läßt sich  $g_{ik}$  bei einer Substitution  $H^{ik} \equiv g^{il} g^{km} F_{lm}$  auch im Sinne eines vierdimensionalen „Dielektrizitätstensors“ verstehen, wobei die Tensordichte  $\mathbf{H}^{ik}$  die von MIE treffend als Quantitätsgrößen bezeichneten Dichten  $(\vec{\mathbf{D}}, \vec{\mathbf{H}})$  repräsentiert, der Feldstärketensor  $F_{ik}$  dagegen die Intensitätsgrößen  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Es ist MIEs Verdienst, bereits vor EINSTEINs Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie erkannt zu haben, daß die Elektrodynamik keineswegs eine lineare Beziehung zwischen  $\mathbf{H}^{ik}$  und  $F_{ik}$  voraussetzt. Das ist letztlich der Grund dafür, daß es bei kovarianter Formulierung möglich ist, auch im Gravitationsfeld an den MAXWELL'schen Gleichungen festzuhalten.

Energie und Impuls eines zeitweilig abgeschlossenen Systems, wie z.B. eines freien H-Atoms, bilden den vom Energie-Impuls-Postulat geforderten – nur im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie zeitlich konstanten – Vierervektor. Das bedeutet, daß die Erfüllung von (4,1) eine zwar hinreichende, nicht aber in jedem Fall notwendige Voraussetzung darstellt. Die verallgemeinerte, auch im Gravitationsfeld gültig bleibende Forderung wurde bereits in (6,75) mit  $T_{i;k}^k = 0$  verwendet. Es ist nun zwar unmöglich, die EINSTEIN'schen Gleichungen für den gesamten mikroskopischen Energie-Impuls-Tensor der Materie (6,85) im Detail zu lösen, andererseits scheint das in diesem Zusammenhang auch gar nicht erforderlich. Denn die Bedingung (6,75), die sich als äquivalent zum Energie-Impuls-Postulat erweist, ist für prinzipiell jede – auch unbekannte – Lösung der EINSTEIN'schen Gleichungen aufgrund der kontrahierten BIANCHI-Identitäten identisch erfüllt.

## 9.1 Eine einfache Interpretation der Allgemeinen Relativitätstheorie

Die ursprüngliche EINSTEIN'sche *Auffassung* der allgemeinen Relativitätstheorie enthält, anders als ihr konsistenter mathematischer Apparat, einen Widerspruch in den eigenen Voraussetzungen. Denn der Schluß auf eine ‚Krümmung‘ von Raum und Zeit setzt – wie EINSTEIN selbst später betonte<sup>83)</sup> – die reale Existenz starrer Maßstäbe und unbeeinflussbarer Uhren voraus. Tatsache aber ist, daß gerade seine eigene spezielle Relativitätstheorie die Unmöglichkeit starrer Körper und unbeeinflussbarer Uhren zwingend beweist<sup>84)</sup>.

In Wirklichkeit ist es ganz *unnötig*, Raum und Zeit überhaupt irgendwelche physikalischen Eigenschaften zuzuschreiben, um *alle* von der allgemeinen Relativitätstheorie numerisch zutreffend erfaßten *reproduzierbaren* Ereignisse abzuleiten. Das ganze Mysterium der so genannten nichteuklidischen Geometrie läßt sich als dreidimensionaler Spezialfall der *Implikation A* aus Abschnitt 3.4 leicht verständlich und – im Sinne POINCARÉ'S – vernünftig auflösen durch die folgende Feststellung: *Eine dreidimensionale nichteuklidische Geometrie ist der widerspruchsfreie mathematische Apparat zur Vermessung des euklidischen Raums mit systematisch längenveränderlichen Maßstäben.*

Der Begriff ‚systematisch‘ bedeutet hier, daß sich alle hinreichend kleinen Maßstäbe zusammen mit allen Objekten, die als Maßstäbe dienen könnten, situationsabhängig einheitlich ändern. Bei Verwendung dieser Maßstäbe scheinen die Gesetze der euklidischen Geometrie dann nur in hinreichend kleinen Bereichen zu gelten. Ein Modell dafür wäre ein Raum mit unterschiedlicher, aber stationärer Temperaturverteilung, in dem sich nur Maßstäbe und Körper eines einheitlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten befinden. Um in einer solchen Situation widerspruchsfrei Geometrie zu betreiben, bedarf es ganz konkret der ursprünglich als mathematische Fiktion entwickelten nichteuklidischen Geometrie<sup>85)</sup>. Selbst hier aber läßt sich der Abstand je zweier Punkte mit längenveränderlichen Maßstäben überbrücken, die im Sinne der euklidischen Geometrie geradlinig aneinandergereiht werden, ohne daß dies auch nur das Geringste mit einer Krümmung des dazwischen liegenden Raums zu tun hätte.

Unabhängig davon scheitert das Konzept einer nichteuklidischen ‚Lichtbahngeometrie‘ des dreidimensionalen Raums an der einfachen Tatsache, daß Lichtbahnen im lokalen Gravitationsfeld *keine räumlichen Geodäten*<sup>86)</sup> sind. Dies ist der Grund dafür, daß sogar feinste Laserstrahlen nicht gut genug wären, um darauf eine mathematisch exakte *dreidimensionale* nichteuklidische Geometrie zu gründen.

Es ist offenbar von grundsätzlicher Bedeutung, daß sich auf großen Skalen mit Hilfe statistischer Auswertung des DOPPLER-Effekts stets ein ausgezeichnetes Bezugssystem definieren läßt. Nach heutiger Auffassung ist dies vor allem durch die isotrope Hintergrundstrahlung realisiert. Damit aber entfällt jene vermeintliche Not-

<sup>83)</sup> Mit seinem Vortrag „*Geometrie und Erfahrung*“ [43] von 1921 hat er POINCARÉ'S diesbezügliche Argumentation ausdrücklich als eine unwiderlegbare Möglichkeit akzeptiert (s. a. [3]).

<sup>84)</sup> Es ist sehr bemerkenswert, daß EINSTEIN einen ersten fundamentalen Beweis selbst geführt hat [21].

<sup>85)</sup> Hätte also GAUSS tatsächlich die Winkelsumme im Dreieck durch optische Vermessung von Bergspitzen überprüft, und diese verschieden von 180° gefunden, so hätte die einfachste und zugleich unwiderlegbare Erklärung darin gelegen, daß hier die Lichtstrahlen – gegebenenfalls durch einen zuvor unbekannten Effekt – abgelenkt worden seien. Ein Temperaturmodell ähnlich dem obigen wurde bereits von WEYL besprochen, der trotzdem an der Deutung im Sinne eines ‚gekrümmten‘ dreidimensionalen Raums festgehalten hat, weil es unmöglich ist, die Deformation von Maßstäben ohne Bezug auf ein ausgezeichnetes System *lokal* eindeutig zu bestimmen.

<sup>86)</sup> Wenn sie es wären, dann müßte z.B. die Lichtablenkung an der Sonne gerade die Hälfte des Meßwertes betragen.

wendigkeit (s. Fußn. 85), das Verhalten veränderlicher Maßstäbe und beeinflussbarer Uhren dem Raum und der Zeit selbst zuzuschreiben, wie dies in der *speziellen* Relativitätstheorie zuerst geschehen ist<sup>87)</sup>.

Zu unterscheiden sind dort gleichförmig gegeneinander bewegte *Bezugssysteme* gegenüber fiktiven *Koordinatensystemen*. EINSTEIN benutzt bei seiner Deduktion von Gravitationswellen einerseits eine als willkürlich verstandene Koordinatenbedingung, um daraus andererseits reale Energie- und Impulsdichten abzuleiten. Diese Vorgehensweise ist deshalb in sich selbst widersprüchlich, weil willkürliche Koordinatenbedingungen da und nur da erlaubt sind, wo es ausschließlich um Tensoren geht. Gravitationswellen in der von EINSTEIN abgeleiteten Form würden demzufolge beweisen, daß es sich bei dem Energie-Impuls-Pseudotensor des Gravitationsfeldes in Wirklichkeit um einen echten Tensor – und zwar um einen in [44] definierten Bi-Tensor – handeln muß.

Denn nur im Hinblick auf den ausgezeichneten Zustand geradlinig gleichförmiger Bewegung, dem mit der Forderung statistischer Isotropie ein universales Bezugssystem entspricht, läßt sich  $t_i^k$  – anders als bei EINSTEINs geometrischer Auffassung – als solch ein Energie-Impuls-(Bi-)Tensor des Gravitationsfeldes verstehen. Das Transformationsverhalten derartiger Größen und die mathematischen Grundlagen für den Übergang von einem ausgezeichneten zu einem beliebigen anderen Bezugssystem leistet ROSENS [44] *bimetrische* Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie auf Basis eines mathematischen Ansatzes von LEVI-CIVITA [45] (s. a. Literaturangaben in [22], Bd. II). Diese Formulierung setzt ohne jeden Verlust an physikalischer Aussagekraft die Existenz eines ausgezeichneten Bezugssystems<sup>88)</sup> voraus.

Die am binären Pulsar PSR 1913+16 [46] indirekt nachgewiesene Existenz von Gravitationswellen stellt alles andere als eine Bestätigung der *ursprünglichen* EINSTEIN'schen Auffassung seiner allgemeinen Relativitätstheorie dar. Ganz im Gegenteil würde eine direkte Messung solcher Wellen gerade die physikalische Relevanz derjenigen gleichförmig bewegten Systeme beweisen, in denen seine Näherung für schwache Felder überhaupt Gültigkeit beanspruchen kann. Genau eines davon wäre durch eine *universale* Hintergrundstrahlung ausgezeichnet.

Es ist eine in diesem Zusammenhang bemerkenswerte Tatsache, daß sich wahre Gravitationsfelder von Scheinfeldern, die allein auf einer Beschleunigung gegen das ausgezeichnete Bezugssystem beruhen, durch ihren nicht-verschwindenden RIEMANN-Tensor  $R_{iklm}$  signifikant unterscheiden.

Wäre es aber im Sinne der seit EINSTEIN vorherrschenden Auffassung zulässig, bei Bedarf – jeweils unter Berufung auf eine freie Koordinatenwahl – die Erfüllung von vier willkürlichen Beziehungen zu fordern, dann ließe sich auch ‚beweisen‘, daß es Gravitationswirkungen überhaupt nicht gibt. Dazu nämlich wähle ich als einfachste aller denkbaren Koordinatenbedingungen die Erfüllung der vier Gleichungen

$$\mathbf{T}^{kl} \partial_i g_{kl} = 0. \quad (9,1)$$

Die mathematische Festlegung eines entsprechenden kartesischen Koordinatensystems mag zwar unter gewissen Voraussetzungen möglich sein, doch mit EINSTEINs Zuordnung von  $T_i^k$  zum phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor (5,2) folgt

$$U^k U^l \partial_i g_{kl} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dU_i}{ds} = 0. \quad (9,2)$$

Jeder Körper wird sich hier also geradlinig gleichförmig bewegen. In Bezug auf das gewählte Koordinatensystem gibt es überhaupt keine Gravitationsbeschleunigung mehr! Außerdem findet hier keinerlei Austausch zwischen dem Energie-Impuls-Tensor der Materie  $T^{ik}$  und dem Pseudotensor des Gravitationsfeldes  $t^{ik}$  statt, sodaß es aus dieser Perspektive – wenn sie erlaubt wäre – z. B. auch keine Ausstrahlung von Gravitationswellen geben

<sup>87)</sup> Und zwar vor allem durch den *Mathematiker* MINKOWSKI. Aus meiner allerdings rein persönlichen Sicht scheint in der Folge das physikalische Verständnis hinter den mathematischen Fortschritten zurückgeblieben zu sein.

<sup>88)</sup> In diesem ausgezeichneten Bezugssystem gelten die EINSTEIN'schen Gleichungen mitsamt dem jeweiligen Energie-Impuls-Tensor der Materie sowie dem bisherigen Pseudotensor des Gravitationsfeldes in ihrer vertrauten Form. Beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem sind dann alle auftretenden gewöhnlichen Ableitungen durch *kovariante in Bezug auf die neuen Koordinaten* zu ersetzen. Bei dieser Vorgehensweise hängt die Energiedichte des Gravitationsfeldes nicht mehr von der Wahl des Koordinatensystems ab. Das ist auch notwendig, wenn es eine reale Energiedichte des Gravitationsfeldes überhaupt geben soll.

könnte. Das aber scheint zu beweisen, daß *nicht* jedes willkürlich gewählte Koordinatensystem zugleich ein physikalisch akzeptables Bezugssystem sein kann.

Auch die Forderung eines universell gültigen Drehimpulserhaltungssatzes spricht dafür, daß es ein ausgezeichnetes Bezugssystem geben, und die allgemeine Relativitätstheorie deshalb im Sinne ihrer bimetrischen Formulierung verstanden werden sollte. Zunächst einmal ist nämlich der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems Teil eines zeitlich konstanten, antisymmetrischen 4-Tensors der *speziellen* Relativitätstheorie. Im Rahmen der allgemeinen Theorie wird nun üblicherweise die Symmetrie des gesamten Energie-Impuls-Tensors  $V^{ik}$  von Materie und Gravitationsfeld – d.h. Symmetrie auch der  $t^{ik}$  – gefordert. Ohne Bezug auf einen ausgezeichneten Bewegungszustand ist das schon deshalb fragwürdig, weil dabei nach herkömmlicher Auffassung die Summe eines Tensors mit einem Pseudo- oder besser Nicht-Tensor gebildet werden soll. Nicht genug damit, zeigt sich bei näherem Hinsehen, daß sich in der allgemeinen Relativitätstheorie der Drehimpulstensor  $M^{\alpha\beta} = \int (x^\alpha V^{\beta 0} - x^\beta V^{\alpha 0}) dV$  wegen des fehlenden Vektorcharakters der  $x^i$  strenggenommen nicht einmal definieren läßt. Konsequenterweise hätte also ein solcher Erhaltungssatz bestenfalls *lokale* Gültigkeit<sup>89)</sup>.

Es bietet sich also an, von der naturgegebenen Existenz eines ausgezeichneten Ruhesystems, wie es beispielsweise durch die Hintergrundstrahlung festgelegt scheint, bei Bedarf Gebrauch zu machen. Die eben angeführten Argumente zusammenfassend läßt sich sagen, daß die vielleicht wichtigsten Gründe dafür – ausgerechnet – in der Relativitätstheorie selbst liegen:

α) Nur in Bezug auf ein ausgezeichnetes Hintergrundsystem scheint es möglich, Gravitationspotentiale so zu definieren, daß diese näherungsweise *lineare Wellengleichungen* erfüllen, deren Lösungen als (indirekt) experimentell bestätigt gelten.

β) Nur in Bezug auf ein ausgezeichnetes Hintergrundsystem scheint es möglich, der *Lokalisierbarkeit* der Energie des Gravitationsfeldes in natürlicher Weise Rechnung zu tragen. Dies gelingt durch die von LEVI-CIVITA initiierte, von ROSEN und anderen Autoren weiterentwickelte bimetrische Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie.

γ) Nur in Bezug auf ein ausgezeichnetes Hintergrundsystem scheint es möglich, der *Drehimpulserhaltung* auch bei großräumiger Betrachtung auf universalen Skalen Rechnung zu tragen.

δ) Nur in Bezug auf ein ausgezeichnetes Hintergrundsystem scheint es möglich, willkürliche Koordinatenbedingungen auszuschließen, die nach herkömmlicher Auffassung frei verfügbar sind, im Extremfall aber gemäß (9,1-2) das absurde Ergebnis liefern könnten, daß es *Gravitationsbeschleunigungen* überhaupt nicht gibt.

Der hier verwendete Begriff des ausgezeichneten Hintergrundsystems ist genaugenommen als eine Klasse – relativ gleichförmig gegeneinander bewegter – zunächst gleichwertiger Systeme zu verstehen, woraus sich aber mit einem ‚Blick‘ zum Sternenhimmel das letztlich einzige ausgezeichnete Hintergrundsystem prinzipiell identifizieren läßt.

Denn die instrumentelle Beobachtung des wohlbekannten Geschwindigkeitsdipols ließe sich im Falle einer *universalen* Hintergrundstrahlung auch verstehen als die – von Michelson damals aufgrund unzutreffender Vorstellungen vergeblich versuchte – Messung der Erdbewegung gegen ein ausgezeichnetes Bezugssystem. Ein alternatives Verständnis der Relativitätstheorie könnte dem ohne weiteres Rechnung tragen.

## 9.2 Das relativistische Modell eines stationären Hintergrund-Universums

Wenn das Universum insgesamt so ist, wie es sein *muß*, dann hat es keinen Sinn, ihm irgendwelche Eigenschaften zuzuschreiben, die auch andere sein könnten. In diesem Fall aber ist es notwendigerweise stationär und euklidisch, da jede reale Abweichung von Stationarität bzw. Euklidizität – im Widerspruch zu der eben gemachten Voraussetzung – immer auch größer oder kleiner denkbar wäre.

Was demgegenüber von der heutigen Kosmologie als in unregelmäßiger Entwicklung befindliche, zeitlich veränderliche Struktur beschrieben wird, braucht gewiß nicht das *gesamte* Universum zu sein.

---

<sup>89)</sup> Was aber würde das beim Übergang in kosmische Bereiche besagen? Auch im Hinblick auf das seltsame Verhalten der Sterne am Rand der Spiralnebel ist das eine interessante Frage, solange das Problem der dunklen Materie nicht wirklich geklärt ist.

Im Unterschied zu den meisten neueren kosmologischen Ansätzen konzentriert sich dieser Abschnitt 9.2 – der auf [20] basiert<sup>90)</sup> und im Hinblick auf [47] einige Konsequenzen zieht – im wesentlichen darauf, was die Relativitätstheorie *ohne weiteres* über das Universum aussagen kann. Von zusätzlich ad hoc eingeführten Hypothesen wird deshalb kein Gebrauch gemacht. Unter diesem Aspekt ist zu beachten, daß der von EINSTEIN benutzte phänomenologische Energie-Impuls-Tensor grundsätzlich mit jeder beliebigen Zusammensetzung einer ansonsten gleichen Materiedichte verträglich ist – was eine notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit des Äquivalenzprinzips darstellt – und demzufolge für sich allein genommen auch keine Information über seine einzelnen Bestandteile enthält. Natürlich aber wird es interessant sein, das hier skizzierte, in Verbindung mit einer konstanten Lichtgeschwindigkeit einzige stationäre kosmologische Modell der Relativitätstheorie zukünftig auch mit Elektrodynamik, Quantenmechanik und Teilchenphysik zu kombinieren.

Dazu sei angemerkt, daß die allgemeine Relativitätstheorie ganz offensichtlich die Gravitation, die spezielle Relativitätstheorie hingegen die Quantenmechanik repräsentiert. Und zwar folgt dies meines Erachtens aus dem Verhalten von Atomuhren und entsprechenden Maßstäben, welche eben den Gesetzen der Quantenmechanik unterliegen und dabei Eigenzeit und Eigenlänge im Sinne der speziellen Relativitätstheorie anzeigen.

Der hier kurz zu besprechende kosmologische Ansatz vernachlässigt zunächst einmal alle räumlichen Inhomogenitäten und beruht damit auf einer groben Vereinfachung. Ein realistisches Konzept sollte mögliche Inhomogenitäten der Materie- bzw. Energieverteilung berücksichtigen, und zwar statistisch.

Trotzdem wird sich herausstellen, daß bereits dieser denkbar einfachste deduktive Ansatz zu einem lebendigen Bild eines über hinreichend große Skalen stationären Universums führt. Den Grund dafür, daß dieses Modell nicht sehr viel früher etwa im Zusammenhang mit der inzwischen an den Beobachtungstatsachen gescheiterten Steady-state Theory [48], [49] diskutiert worden ist, sehe ich zunächst darin, daß im Hinblick auf die – tatsächlich bis heute – direkt oder indirekt beobachtete Materie- und Energiedichte eher ein Linienelement mit räumlicher ‚Krümmung‘ erwartet wurde. Darüberhinaus impliziert das stationäre Modell einen *negativen* Gravitationsdruck von einem Drittel der kritischen Dichte. Ein negativer Druck galt lange Zeit als inakzeptabel, doch wird in Abschnitt 9.2.a kurz erläutert, warum er physikalisch trotzdem plausibel ist. Angesichts der in den letzten Jahren sehr viel weitergehenden Hypothesen z. B. einer ‚dunklen Energie‘ aber kann ein negativer Gravitationsdruck heute ohnehin kaum noch befremden.

Meines Erachtens ist die Auffassung, daß es ein relativistisches Modell für ein stationäres Universum geben sollte, bis heute vorhanden. Unglücklicherweise aber schien jeder diesbezügliche Versuch aussichtslos, nachdem die Steady-state Theory gescheitert war. Doch besagt das wenig. Denn trotz ihres Ansatzes – und trotz ihres Namens – beschreibt diese Theorie keineswegs ein gleichbleibendes Universum. Insbesondere folgen aus ihrem Linienelement Rotverschiebungsparameter  $z$ , die abhängig sind von der Zeit, woraus dann zusätzlich auch die Veränderlichkeit aller mit  $z$  verknüpften Observablen folgen muß. Das verhält sich bei dem hier zu besprechenden stationären Modell grundsätzlich anders.

Um nun möglichen Verwechslungen sowohl mit der Steady-state Theory (SST) als auch mit der später daraus erwachsenen Quasi-Steady-State Cosmology (QSSC) [50] vorzubeugen, sei hier auf einige entscheidende Unterschiede hingewiesen. Der hauptsächliche Unterschied liegt unverkennbar darin, daß die Autoren an dem Konzept der *Eigenlänge* als dem vermeintlich relevanten Maß auch bei beliebig großen *universalen* Abständen festgehalten haben. Das kommt bereits in den Titeln der beiden oben zitierten Arbeiten zum Ausdruck, die ausdrücklich die Vorstellung eines expandierenden Universums betonen. In Abschnitt 9.2.b wird aber gezeigt, daß diese naive Interpretation der kosmischen Rotverschiebung in sich selbst widersprüchlich, und letztlich vor allem einfach überflüssig ist. Gerade das Festhalten an einer Expansion bringt auch das Dilemma einer in der Steady-state Theory notwendig scheinenden spontanen Entstehung von Materie aus dem Nichts mit sich, weil ansonsten deren Dichte nicht – wie von dieser Theorie gefordert – gleich bleiben könnte. Solch eine physikalisch inakzeptable Konsequenz läßt meines Erachtens erkennen, daß die Steady-state Theory von Anfang an widersprüchlich

---

<sup>90)</sup> Dort finden sich – abgesehen von wesentlich detaillierteren Berechnungen, auf die ich mich im folgenden stütze – einige relevante Abschnitte, die mit der hier gegebenen knappen Darstellung im Zusammenhang zu sehen sind. Dies betrifft unter anderem auch das Konzept des stationär eingebetteten lokalen Linienelements, auf dessen Basis sich z. B. Planeten, Monde, Satelliten nur über verhältnismäßig kurze Beobachtungszeiträume  $t \ll T_H$  so bewegen könnten, wie dies aufgrund der lokalen SCHWARZSCHILD-Lösung zu erwarten ist.

war. Ein anderer wesentlicher Unterschied fällt unter das Stichwort Horizont-Probleme, auf die ich hier erst gar nicht einzugehen brauche, weil es sie – ganz im Einklang mit dem *Prinzip von der Einheit der Natur* aus Abschnitt 3.1 – beim stationären Modell einfach nicht gibt.

Allerdings liegt beiden Theorien die gleiche Intention zugrunde, und wertvolle Einsichten aus dem früheren Ansatz fließen hier ein. Dies gilt angefangen von dem dort erstmals ausdrücklich formulierten *Vollständigen Kosmologischen Prinzip* (s. [48], das mit *Postulat I* – jedoch nur bei konsequenter Anwendung auch auf die Rotverschiebung – grundsätzlich übereinstimmt) über das Verständnis der Bildung schwerer Elemente in Sternen bis hin zu der Erkenntnis, daß die thermalisierte Bindungsenergie des gesamten kosmischen Heliumanteils gerade der Energiedichte einer Wärmestrahlung von 2.7 K entspricht [51]. Ein zusätzlicher Hinweis auf diese spezielle Strahlungstemperatur wird sich auf andere Weise auch aus dem stationären Linienelement ergeben.

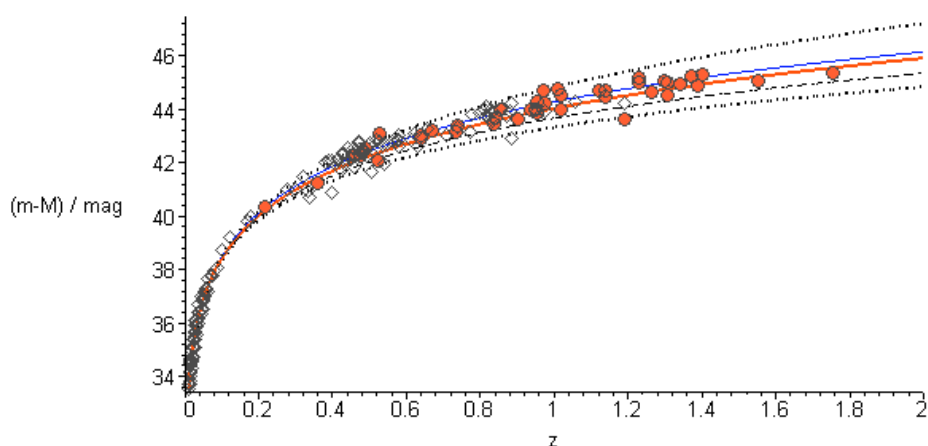


Abb. 4: Zum Vergleich mit den Supernova-Ia-Daten ist hier der Entfernungsmodul  $m-M$  als Maß der scheinbaren Helligkeit gegen die Rotverschiebung  $z$  aufgetragen. – Von oben nach unten:

Steady-state Theory [SST, grau punktierte Linie], das gegenwärtige Concordance Model [CCM, blau durchgezogen], stationäres Hintergrunduniversum [SU, rot durchgezogen], EINSTEIN-DE SITTER-Kosmologie [EdS, grau unterbrochen] und ein strahlungsdominiertes Modell [RDM, grau punktiert].

In Anlehnung an RIESS *et al.* [51] sind die terrestrisch entdeckten Supernovae Ia des *goldenen* Datensatzes ('gold sample') als graue Rauten, die mit dem HUBBLE-Space-Teleskop entdeckten als rot gefüllte Kreise eingetragen.

Die noch vor wenigen Jahren von vielen favorisierte EdS-Kosmologie ist hierdurch ebenso widerlegt wie die SST. Ohne die ein stationäres Universum repräsentierende rote Linie sah man sich offenbar gezwungen, den kosmologischen Tatsachen durch Kombination der SST- und der EdS-Modelle *ad hoc* im Sinne des CCM (blau) Rechnung zu tragen.

Zu einer konkreten Sichtung überhaupt in Frage kommender Möglichkeiten bietet es sich an, das hier vertretene Modell eines stationären Universums sowie einige frühere kosmologische Ansätze mit den einschlägigen Supernova-Ia-Daten (SNe-Ia) zu konfrontieren, die heute durch das *Cosmological Concordance Model (CCM)* numerisch zutreffend beschrieben werden. Das erste Ergebnis einer spontanen Gegenüberstellung – ohne Berücksichtigung etwaiger kosmischer Inhomogenitäten oder auch irgendeiner schwachen intergalaktischen Absorption – findet sich in Abbildung 4. Obwohl bei näherem Hinsehen die das stationäre Modell repräsentierende rote Linie von der blauen CCM-Linie um maximal etwa  $0.2^m$  [mag] abweicht, ist diese Differenz doch erstaunlich klein, wenn sie mit den *divergierenden* Abweichungen der übrigen, ehemals vieldiskutierten Modelle verglichen wird (zu den Möglichkeiten einer beinahe vollständigen Übereinstimmung s. Anhang B).

Aufgrund des bereits in Abschnitt 3.4 formulierten *Prinzips der lokalen Neuentstehung* – die natürlich nicht mit der oben erwähnten ‚Entstehung aus dem Nichts‘ zu verwechseln ist – sollte z. B. die  $^4\text{He}$ -Häufigkeit in einem stationären Universum überschlägig 25% betragen. Während ihres Wachstums könnte es sich bei den dazu erforderlichen Gravitationszentren extremer Stärke um eine Art *Schwarzer Löcher* handeln<sup>91)</sup>, bevor diese sich – wenn ihre Zeit gekommen ist – möglicherweise in lokalen ‘Big-Bang’-Szenarien schlagartig zu *Weißten Quellen* verwandeln.

<sup>91)</sup> Dabei kommen auch Quasare in Frage. Selbst die Möglichkeit, daß Supernova-Explosionen genügen könnten, um einen kosmischen Kreislauf in Gang zu halten, kann nicht ohne nähere Begründung ausgeschlossen werden.

| <i>Some characteristic ITEMS<br/>(list extensible)</i>                                                                         | <b>Ultra-large scale model of a<br/>STATIONARY UNIVERSE<br/>(SU)</b>                                                                                                               | <b>Concordance/Consensus Model of<br/>OUR COSMOS<br/>(CCM)</b>                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>scale factor</i>                                                                                                            | $a_{\text{SU}} = 1 + Ht'$<br>---<br>( $\zeta^* = e^{Ht'}$ )                                                                                                                        | $a_{\text{CCM}}(t') =$<br>$\left\{ \left( \frac{1}{\Omega_\Lambda} - 1 \right) \sinh^2 \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \sqrt{\Omega_\Lambda}}{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}} \right) - \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} Ht' \right] \right\}^{1/3}$ |
| <i>approach</i><br>—<br><i>objective</i>                                                                                       | deductive<br>—<br>features of the ultra-large scale universe                                                                                                                       | inductive<br>—<br>reconstruction of a ‘big bang’ universe                                                                                                                                                                                                |
| <i>model parameters</i>                                                                                                        | the natural constants $c, \gamma, H$<br>describing the background universe                                                                                                         | several independent parameters<br>$T_0, H_0, q_0, \Omega_0, \Omega_M, \Omega_\Lambda$ ,<br>describing ‘our’ cosmos<br>(additional parameters of inflation)                                                                                               |
| <i>cosmological constant</i>                                                                                                   | none                                                                                                                                                                               | $\Omega_\Lambda \approx 0.73$                                                                                                                                                                                                                            |
| <i>redshift of starlight<br/>emitted from<br/>sources at rest with<br/>respect to the CMB</i>                                  | $z = e^{Hl^*}$ , where $l^* = \text{constant}$ ,<br>i.e. independent of time,<br>thus directly showing the basic<br>feature of stationarity*)                                      | $z = z(t', l^*)$ ,<br>thus dependent on time<br>[as well as all observables which are<br>functions of $z$ , like $H(t')$ or $q(t')$ ]                                                                                                                    |
| $H$                                                                                                                            | HUBBLE's law in the form $cz \approx Hl^*$<br>yields $H \equiv \dot{a} = \text{constant}$ .<br>This basic observable of cosmology is<br>a natural constant here                    | both the <i>significant</i> HUBBLE<br>parameter $H_s \equiv \dot{a}$ as well as<br>the <i>conventional</i> HUBBLE parameter<br>$H_c(t') \equiv \dot{a}/a$ are depending on time                                                                          |
| $T_0, R_0^*$                                                                                                                   | $\equiv T_H, R_H$ maximum age, radius<br>of any macroscopic objects or structures                                                                                                  | $T_0 \approx T_H$ the age, $R_0^* \approx 3.4 R_H$ the radius<br>of ‘the universe’                                                                                                                                                                       |
| $H_0 T_0$                                                                                                                      | $H_0 T_0 \equiv 1$<br>(due to the <i>stationary</i> values of<br>$H_0 \equiv H$ and $T_0 \equiv 1/H$ )                                                                             | $H_0 T_0$ near 1,<br>though only a <i>temporary</i> value today<br>(coincidentally $H_0 T_0 \approx 1$ )                                                                                                                                                 |
| ‘deceleration’<br>parameter<br>$q \equiv$<br>$-a(d^2a/dt^2)/(da/dt)^2$                                                         | deduced from<br><i>postulate I of stationarity</i> :<br>$q \equiv 0$                                                                                                               | <i>positive</i> (probably) after ‘big bang’,<br><i>negative</i> while inflation,<br>then <i>positive</i> again for some $10^9$ ys,<br><i>negative</i> today                                                                                              |
| <i>initial singularity</i>                                                                                                     | none with respect to the universe,<br><i>local</i> (pseudo-)singularities with respect<br>to <i>local</i> proper time $\tau_{\text{SRT}}$<br>(breakdown of proper length and time) | indescribable origin in a ‘big bang’,<br>contradiction to first principles of<br>physics like <i>ex nihilo nihil fit</i> if<br>concerning the universe as a whole                                                                                        |
| <i>space &amp; time</i>                                                                                                        | no physical objects                                                                                                                                                                | created in the ‘big bang’                                                                                                                                                                                                                                |
| <i>rods vs. distances</i>                                                                                                      | local rods <i>stationarily</i> shrinking<br>(as well as all solid objects, too)                                                                                                    | space expanding <i>variously</i> with time<br>(no expansion of solid objects)                                                                                                                                                                            |
| <i>spatial flatness</i>                                                                                                        | deduced from<br><i>postulate II of a constant universal<br/>speed of light <math>c^* = c</math></i>                                                                                | approximately,<br>though only after a phase of<br>‘superluminal inflation’                                                                                                                                                                               |
| <i>horizon problems</i>                                                                                                        | none                                                                                                                                                                               | overcome by ‘superluminal inflation’                                                                                                                                                                                                                     |
| <i>range of direct<br/>compatibility with<br/>the SNe Ia data</i>                                                              | $0.1 < z < 1.7$<br>(excluding the local region $z < 0.1$ from<br>the full range available so far)                                                                                  | $0.01 < z < 1.7$<br>(the full range of observational data<br>available so far)                                                                                                                                                                           |
| <i>compatibility, given e.g.<br/>a peculiar <math>\delta z \approx 0.002</math><br/>caused within <math>z \leq 0.01</math></i> | $0.01 < z < 1.7$<br>(the full range of observational data<br>available so far)                                                                                                     | $0.1 < z < 1.7$<br>(excluding the local region $z < 0.1$ from<br>the full range available so far)                                                                                                                                                        |

\*) The SU-model should not be confused with the old Steady-state Theory whose redshift parameters are not stationary at all.

---

Tafel 1: Das deduktive Modell eines stationären Universums (SU) im Vergleich mit dem heutigen CCM

Denn die aus dem Urknall-Modell berechnete und tatsächlich vorgefundene  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit kann keineswegs die unnötige Hypothese eines *einzigsten* derartigen Ereignisses beweisen. Stattdessen beweist sie meines Erachtens gerade umgekehrt, daß sich die in einem stationären Universum notwendigerweise auftretenden originären Ereignisse sehr gut als lokale ‘Big-Bang’-Szenarien beschreiben lassen. Es scheint zu genügen, daß in einem jeweiligen Gravitationskollaps hinreichend hohe Temperaturen – wenn auch nur für extrem kurze Zeitspannen – erreicht werden, bevor dann in einer unausweichlich erfolgenden Explosion Prozesse einsetzen werden, die ganz wesentlich den Gesetzen von Gravitation und Quantenmechanik unterliegen.

Nicht zuletzt auch unter Berufung auf EINSTEINS diesbezügliche Ideen behaupte ich nun: wenn Gesichtspunkte der Ästhetik wie Symmetrie, Eleganz, Klarheit bei der Beurteilung physikalischer Theorien überhaupt eine Rolle spielen, dann dürfte eigentlich kein Zweifel darüber bestehen, welches der beiden in Tafel 1 einander gegenübergestellten Modelle am ehesten das *Universum als Ganzes* beschreiben könnte. Davon abgesehen weist das einfachste aller relativistischen Modelle aus sich selbst heraus wesentliche Züge auf, die den Beobachtungstatsachen weitgehend entsprechen, welche vom Concordance Model – dort allerdings nur mit Hilfe *ad hoc* eingeführter Hypothesen – zusammenfassend beschrieben werden.

Das Kriterium der Ästhetik hat aber außerdem noch einen sehr praktischen Aspekt. In der Fachliteratur finden sich nicht selten modellbezogene Darstellungen, die – seien es Formeln, Tabellen oder Graphen – mehr als unbedingt nötig theorie-kontaminiert sind. Schon allein im Interesse objektiv austauschbarer Beobachtungsdaten könnte es deshalb sinnvoll sein, sich auf das *einfachste* Modell zu beziehen, das eine systematische Einordnung aktueller Entwicklungen erlaubt, besonders wenn es den Tatsachen ohnehin sehr nahe kommt. Es spricht also einiges dafür, daß das im folgenden entwickelte Bild eines stationären Hintergrunduniversums durchaus eine brauchbare Grundlage der relativistischen Kosmologie darstellen kann.

### 9.2.a Ein Linienelement mit konstantem $c^*$ und gleichbleibenden Werten von $z$

Aus den beiden in Abschnitt 3.4 formulierten Postulaten wird hier zunächst das Linienelement eines stationären Universums als dasjenige konstanter Lichtgeschwindigkeit  $c^*$  und gleichbleibender Rotverschiebungswerte  $z$  abgeleitet. Die dort gegebene Definition der universalen Zeit  $t^*$  setzt ein räumlich euklidisches Universum bereits voraus, sodaß dementsprechend jedes *universale* Linienelement in einer einfachen Skalarform geschrieben werden kann als

$$d\bar{\sigma}^{*2} = \zeta^{*2} \{ c^{*2} dt^{*2} - dl^{*2} \}. \quad (9,3)$$

Dieser allein bezüglich des Skalars  $\zeta^* \approx 1 + Ht^* + O^2(Ht^*)$  noch zu präzisierende Ausdruck ist ansonsten eindeutig festgelegt durch das *Postulat II konstanter universaler Lichtgeschwindigkeit*  $c^* \equiv dl^*/dt^* = c$ , welche bei keiner anderen Form als (9,3) gegeben wäre. Mit der speziellen Zuordnung

$$\zeta^* = e^{Ht^*}, \quad (9,4)$$

die unter Verwendung von  $H$  als einer echten Naturkonstanten hier gelten soll, wird sich das Linienelement (9,3-4) zusammen mit seinem Energie-Impuls-Tensor  $T_{ik}^*$  nicht nur als singularitätsfrei erweisen, sondern gemäß *Postulat I* gleichzeitig auch als *stationär*:

Wegen der exponentiellen Form des Zeitskalars  $e^{Ht^*}$ , hängen alle relativen zeitlichen Änderungen allein von *Differenzen*  $\Delta t^* = t^* - t_R^*$  ab. Dieser Sachverhalt erlaubt es, für beliebige durch (9,3-4) beschriebene zusammenhängende Beobachtungskomplexe den zeitlichen Bezugspunkt  $t_R^* = 0$  zu setzen. Bei jeweiliger Festlegung geeigneter Einheiten ist kein spezieller Punkt der universalen Zeitskala ausgezeichnet.

Unter der Voraussetzung einer fiktiven, dem Ansatz (9,3) exakt entsprechenden isotrop-homogenen Materieverteilung ohne alle lokalen Inhomogenitäten wäre diese Stationarität mathematisch perfekt. Angesichts fehlender makroskopischer Strukturen gäbe es dann trotz Zeitabhängigkeit gemäß (9,4) keine Möglichkeit, überhaupt irgendeine Veränderung im Universum festzustellen. Die physikalische Wirklichkeit sieht natürlich anders aus.

Im Hinblick auf (9,3-4) ergeben sich die mit – bezüglich der Hintergrundstrahlung in Ruhe<sup>92)</sup> befindlichen – Atomuhren gemessenen Elemente der lokalen Eigenzeit  $d\tau_{\text{SRT}}$ , sowie die mit spektralen Maßstäben gemessenen Elemente der lokalen Eigenlänge  $d\lambda_{\text{SRT}}$  zu

$$\begin{aligned} d\tau_{\text{SRT}} &\approx e^{Ht^*} dt^*, \\ d\lambda_{\text{SRT}} &\approx e^{Ht^*} dl^*. \end{aligned} \quad (9,5)$$

Im nachfolgenden Abschnitt wird sich außerdem zeigen, daß es für die Integrabilität der Relationen (9,5) Obergrenzen gibt, die meines Wissens bisher nicht beachtet wurden. Zunächst aber läßt sich aus (9,3-5) für ruhende Lichtquellen sofort ein vollständig zeitunabhängiger Rotverschiebungsparameter

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{beobachtet}}}{\lambda_{\text{emittiert}}} - 1 \quad (9,6)$$

ableiten<sup>93)</sup>, der hier durch die beiden äquivalenten Beziehungen

$$z = e^{Hl^*/c} - 1 \Leftrightarrow l^* = \frac{c}{H} \ln(1+z) \quad (9,7)$$

gegeben ist, wobei  $l^* = c\Delta t^*$  die überbrückte Entfernung und  $\Delta t^*$  die benötigte Laufzeit bedeuten. – Die ursächliche Erklärung für diese universale Rotverschiebung liegt offensichtlich in den Beziehungen (9,5) zwischen den Intervallen von lokaler Eigenzeit und Eigenlänge ( $d\tau_{\text{SRT}}, d\lambda_{\text{SRT}}$ ) einerseits sowie den universalen Längen und Zeiten ( $l^*, t^*$ ) andererseits. Die Interpretation dieser Beziehungen wird im Abschnitt 9.2.b eingehend erörtert.

Der zu dem Linienelement (9,3-4) gehörende Energie-Impuls-Tensor folgt aus EINSTEINS ursprünglichen Gleichungen  $E_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \kappa T_{ik}$ , die sich hier in der Form

$$E_{ik}^* = \begin{pmatrix} \frac{2H^2}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \kappa p^* g_{ik}^* = \kappa T_{ik}^* \quad (9,8)$$

schreiben lassen und dabei einen *negativen* Gravitationsdruck  $p^* = -\frac{1}{3}\rho^*$  implizieren, wobei der Ausdruck  $\rho^* \equiv T_0^{0*} = \rho_c e^{-2Ht^*}$  die phänomenologische Energiedichte mit  $\rho_c = 3H^2/\kappa c^2$  als deren *kritischem* Wert bedeutet. Im Hinblick auf (9,8) könnte die phänomenologische Massendichte, im Unterschied zur vollen Energiedichte  $\rho^*$ , gegebenenfalls lediglich  $\mu^* = \frac{2}{3}\rho^*/c^2$  betragen.

Offensichtlich entspricht der Gravitationsdruck  $p^* = -\frac{1}{3}\rho_c e^{-2Ht^*}$  einer stationär veränderlichen kosmologischen ‚Konstanten‘. Meines Erachtens wurde in der Vergangenheit übersehen, daß ein universaler Gravitationsdruck  $p^*$  negativ sein *muß*. Und zwar deshalb, weil die Wände eines fiktiven Kastens, der eine Vielzahl von statistisch in Ruhe befindlichen Galaxien enthielte, nach *außen* ziehen müßte, damit die inneren Galaxien nicht zusammenklumpen, wenn alle äußeren entfernt wären.

Es ist bemerkenswert, daß der EINSTEIN-Tensor bei Verwendung des stationären Linienelements (9,3-4) unabhängig wird von der Zeit. Außerdem tritt die HUBBLE-Konstante in den *kovarianten* Gleichungen (9,8) nur in der Form  $H^2$  auf. Bei gleicher mittlerer Energiedichte des Universums wären also Lösungen von (9,8) mit verschiedenem Vorzeichen von  $H$  denkbar, doch soll darauf hier nicht näher eingegangen werden.

Aus der Rotverschiebungsformel (9,7) ergibt sich nach der üblichen Vorgehensweise (s. [20]) als Beziehung für die scheinbare Helligkeit  $I(z)$  der Ausdruck

<sup>92)</sup> Die Bezeichnung ‚in Ruhe‘ oder ‚ruhend‘ bezieht sich immer auf das gemäß *Implikation C* festgelegte ausgezeichnete Bezugssystem, das hier der Einfachheit halber mit dem der kosmischen Hintergrundstrahlung gleichgesetzt werden mag.

<sup>93)</sup> Ausführlichere Ableitungen der Beziehungen dieses Abschnitts 9.2 können der bereits zitierten Arbeit [20] des Verf. entnommen werden.

$$I(z) = \frac{LH^2}{4\pi c^2} \left[ (1+z) \ln(1+z) \right]^{-2}. \quad (9,9)$$

Hier steht  $L$  für die absolute Helligkeit einer in Ruhe befindlichen Lichtquelle. Wie der Rotverschiebungsparameter  $z$  der jeweiligen Lichtquelle selbst, so ist auch diese Beziehung offensichtlich unabhängig von der Zeit.

Um das hier gefundene Resultat unmittelbar mit den in [50a], [50b] zusammengestellten Supernova-Ia-Daten vergleichen zu können, ist es notwendig, sich auf den als *Entfernungsmodul* wohlbekannten Ausdruck

$$m - M = 5 \log \left( \frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (9,10)$$

zu beziehen. Dabei steht  $m$  ( $\equiv I$ ) für die scheinbare und  $M$  ( $\equiv L$ ) für die absolute Helligkeit (Größe, Magnitude) eines Objekts, und  $d_L$  ist die aus der Leuchtkraft geschlossene und durch

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi I}} \quad (9,11)$$

definierte Leuchtkraft-Distanz (, *luminosity distance* '). Die Einsetzung von (9,11), (9,9) in (9,10) ergibt dann

$$m - M = 5 \log \left[ (1+z) \ln(1+z) \right] + 25 + 5 \log \left( \frac{c/H}{\text{Mpc}} \right). \quad (9,12)$$

Der Entfernungsmodul ist für jedes in Frage kommende kosmologische Modell von fundamentalem Interesse, da er eine eindeutige Beziehung zwischen den *Meßgrößen* der scheinbaren Helligkeit  $m$  kosmischer ,Standardkerzen' und den zugehörigen Rotverschiebungswerten  $z$  herstellt.

Es ist gerade der hier abgeleitete stationäre Entfernungsmodul (9,12), der eine verblüffende Nähe zu den Supernova-Ia-Daten zeigt (s. Abb. 4). Darüberhinausgehende Möglichkeiten einer beinahe vollständigen Übereinstimmung mit den Meßwerten – wie vor allem die Berücksichtigung eines eventuellen lokalen HUBBLE-Kontrasts  $\delta H/H$  – werden in Anhang B erörtert.

Trotz einer im Hinblick auf das stationäre Universum unendlichen Anzahl von Galaxien ergibt sich mit (9,7) eine *endliche* mittlere Strahlungsdichte baryonischer Materie, deren Integral äquivalent ist zu dem einer Schwarzkörperstrahlung der Temperatur  $\Theta_{\text{effective}} = 5.4 \text{ K} \times ({}^5/4 \Omega_{\text{baryonic}})^{1/4}$ . Dieser Wert ist zwar – unter Benutzung einer Strahlungsintensität pro Masse wie bei der Sonne – sehr grob berechnet, löst aber grundsätzlich das OLBERS'sche Paradoxon [52], [53] im Rahmen des stationären Modells. Seltsam genug, mit dem heute größenordnungsmäßig geschätzten Anteil  $\Omega_{\text{baryonic}} \approx 5\%$  der kritischen Dichte  $\rho_c$  würde als entsprechende Temperatur gerade 2.7 K folgen (s. [20]).

Zur Gegenüberstellung mit der in ihren Wurzeln bis zu EINSTEIN [54] und DE SITTER [55] zurückreichenden bisherigen Auffassung der relativistischen Kosmologie soll das stationäre Linienelement (9,3-4) nun in einer traditionellen FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER-(FLRW-)Form [56], [57], [58], [59] geschrieben werden. Dies ist sehr einfach durch Transformation der universalen Zeit  $t^*$  auf die *integrierte* Koordinatenzeit  $t'$  möglich. Aufgrund des Kovarianzcharakters der allgemeinen Relativitätstheorie ist es nur selbstverständlich, daß sich dadurch an den physikalischen Konsequenzen des transformierten Linienelements nichts ändern kann.

Die integrierte Koordinatenzeit  $t'$  bzw.  $T' \equiv T_H + t'$  mit der HUBBLE-Zeit  $T_H \equiv 1/H$  ist definiert durch die äquivalenten Relationen

$$T' \equiv \frac{t^* e^{Ht^*}}{H} \quad \Leftrightarrow \quad t^* \equiv \frac{\ln(HT')}{H}, \quad (9,13)$$

die mit der ersten der Beziehungen (9,5) in Einklang stehen, wenn hier  $dT' = dt' \approx d\tau_{\text{SRT}}$  gesetzt wird. Die Transformation ergibt nun die FLRW-Form

$$d\bar{\sigma}_{(\text{FLRW})}^2 = c^2 dt'^2 - (HT')^2 dl'^2. \quad (9,14)$$

Mit dem *Skalenfaktor*  $a \equiv 1 + Ht' \equiv HT'$  ist diese Form allerdings nicht mehr singularitätsfrei. Doch folgen daraus die gleichen Resultate wie aus dem ursprünglichen stationären Linienelement (9,3-4). Insbesondere die *zeit-unabhängige* HUBBLE-Beziehung (9,7) läßt sich auch mit (9,14) leicht verifizieren. Der stationäre ‚Decelerations‘-, d.h. Verlangsamungs-Parameter<sup>94)</sup> hat naturgemäß den Wert  $q \equiv -a(d^2a/dt'^2)/(da/dt')^2 = 0$ .

Die Geschichte des ‚Decelerations‘-Parameters zeigt eine klare Tendenz, sich letztlich auf diesen Wert  $q = 0$  des stationären Linienelements hinzuentwickeln. Nachdem nämlich das allererste, *statische* kosmologische Modell EINSTEINS vor allem durch die Entdeckung der Rotverschiebung widerlegt war, wurde als Konsequenz der Steady-State Theory [48], [49] zwischenzeitlich der negative Wert  $q = -1$  erwogen, bis dieses Modell aufgrund einschlägiger Beobachtungstatsachen aufgegeben werden mußte [61]. Daraufhin glaubte man bis vor wenigen Jahren, daß – dem EINSTEIN-DE SITTER-Modell entsprechend – ein zeitlich veränderlicher ‚Decelerations‘-Parameter immer positiv sein müsse ( $q > 0$ ). Die Supernova-Ia-Beobachtungsdaten von 1998/99 (s. Anhang B) stellten deshalb eine große Überraschung dar, da sie stattdessen einen negativen Wert ( $q < 0$ ) zu beweisen schienen. Dieses Ergebnis wiederum wurde nur wenige Jahre später – d.h. in allerjüngster Vergangenheit, s. [50a], [50b] – dahingehend eingeschränkt, daß  $q_0$  heute zwar *negativ*, in der Vergangenheit aber vorübergehend *positiv* gewesen sei, nämlich ungefähr für die erste Hälfte der HUBBLE-Zeit.

Wohl gelingt es dem derzeitigen Concordance Model, die vermeintlich abwechselnden Beschleunigungs- und Bremsphasen mit überraschender numerischer Konsistenz zu beschreiben. Doch aufgrund dieses Modells hätte man beispielsweise zu akzeptieren, daß der Kehrwert eines veränderlichen HUBBLE-Parameters genau nur ein einziges Mal mit dem ‚Alter des Universums‘ übereinstimmt, und zwar zufällig gerade heute. Auch die derzeit *ad hoc* verwendete ca.  $2/3$ -Rolle der von EINSTEIN selbst als „... *größte Eselei meines Lebens*“ verworfenen kosmologischen Konstanten  $\Lambda$  wäre in der Realität mehr als befremdlich, wenn sie das physikalische Universum als ganzes beträfe – was nach den grundsätzlichen Bemerkungen des Abschnitts 3.4 außerdem für alle Zeiten eine unbeweisbare Hypothese bleiben müßte.

Welchem unbefangenen Beobachter aber drängt sich angesichts des in der Vergangenheit mehrfach wechselnden Vorzeichens des jeweils angenommenen ‚Decelerations‘-Parameters  $q_0$  nicht die Vermutung auf, daß sich dessen Wert am Ende einfach als der eines stationären *Universums*, nämlich  $q \equiv 0$  herausstellen könnte?

Trotz gleicher Resultate insbesondere bezüglich stationärer Rotverschiebungswerte (9,7), scheinbarer Helligkeiten (9,9) oder des ‚Decelerations‘-Parameters  $q$  scheint ein Vergleich von (9,3-4) und (9,14) einen Widerspruch aufzuzeigen. Es stellt sich nämlich die Frage, wie beide das gleiche stationäre Universum beschreiben sollen. Denn im Hinblick auf (9,14) sieht es so aus, als seien zur negativen HUBBLE-Zeit  $t' = -T_H = -1/H$  alle Eigenlängen  $\lambda_{\text{SRT}}$  Null gewesen, alle entsprechenden Dichten demzufolge unendlich, und das ganze Universum singular. Doch diese Schlußfolgerung ist meines Erachtens nicht berechtigt, da die zu (9,5 $\alpha$ ) gleichwertige Beziehung  $d\lambda_{\text{SRT}} \approx (HT')dl^*$  nur auf Skalen anwendbar ist, die lokal sind bezüglich Raum *und* Zeit. Ein Vergleich von (9,5 $\alpha$ ) und (9,13) ergibt außerdem  $d\tau_{\text{SRT}} \approx dt'$ . Aber das Intervall  $dt'$  der Koordinatenzeit ist integrierbar,  $d\tau_{\text{SRT}} \equiv dt_{\text{SRT}}(dl_{\text{SRT}}=0)$  ist es nicht, weil  $dt_{\text{SRT}}$  nur lokal definiert ist und zwar *zusammen* mit  $dl_{\text{SRT}}$  durch die Beziehung  $d\sigma_{\text{SRT}}^2 = c^2 dt_{\text{SRT}}^2 - dl_{\text{SRT}}^2$ . Selbst auf Basis eines Linienelements in FLRW-Form bleibt es daher unverzichtbar, die lokale Eigenzeit  $t_{\text{SRT}} \ll T_H$  von der FLRW-Koordinatenzeit  $t'$  zu unterscheiden.

Die Rotverschiebung der Spiralnebel als fundamentale Beobachtungstatsache der Kosmologie spricht bei dem hier behandelten stationären Modell gegen eine – jedenfalls *unnötige* – Interpretation als DOPPLER-Effekt. Und zwar ergibt sich das aus der durch die Supernova-Ia-Daten (s. Abb.4 und Anhang B) bestätigten Tatsache, daß gemäß (9,7) diese Rotverschiebung zumindest näherungsweise *zeitunabhängig* ist. Eine solche Unabhängigkeit von der Zeit aber stünde in direktem Widerspruch zu einer realen Expansion, wenn das HUBBLE'sche Gesetz in der Form richtig wäre, daß die Rotverschiebung umso größer ist, je weiter entfernt die Objekte sind<sup>95)</sup>. Diese

<sup>94)</sup> Der hier bezüglich der Rotverschiebung und anderer universaler Zusammenhänge als stationär erwiesene ‚Decelerations‘-Parameter  $q = 0$  wurde zuvor im Sinne einer gleitenden Expansion des Universums interpretiert („coasting cosmology“ [60], der Inhalt dieser Arbeit war Verf. bei der Aufstellung des stationären Linienelements in [20] gänzlich unbekannt). Dort haben allerdings weder die Forderung einer fehlenden räumlichen ‚Krümmung‘ bzw. einer konstanten universalen Lichtgeschwindigkeit  $c^* = c$  eine Rolle gespielt, noch wurde beispielsweise die resultierende Zeitunabhängigkeit der Rotverschiebungswerte  $z$  erwähnt.

<sup>95)</sup> Die folgenden beiden Aussagen sind ohne Zuhilfenahme von Spitzfindigkeiten miteinander unvereinbar: a) Die Fluchtgeschwindigkeit von Galaxien ist *umso größer*, je weiter entfernt diese von uns sind; und b) Jede Galaxie mit zei-

Feststellung legt nahe – was sich im nächsten Abschnitt mathematisch bestätigen wird – daß es sich bei dem bisher als ‚Expansion des Raums‘ gedeuteten Phänomen letztlich nur um lokale Vorgänge handeln kann. Eine universale Rotverschiebung ist aus dieser Sicht als ein weiterer allgemeinrelativistischer Effekt zu verstehen, der eine zusätzliche Variante der gewöhnlichen Gravitationsrotverschiebung darstellt.

Es ist an dieser Stelle nun unvermeidlich, eine irritierende Konfusion hinsichtlich des konventionellen HUBBLE-Parameters auszuräumen. Dieser scheint im Falle des stationären Linienelements mit  $a \equiv HT'$  nämlich gemäß  $H_k(t') \equiv \dot{a}/a = 1/T'$  eine Zeitabhängigkeit der Rotverschiebung zu beweisen, die jedoch nicht den Tatsachen entspricht. Denn gemäß (9,7) ist  $z$  allein von der *konstanten* universalen<sup>96)</sup> Entfernung  $l^*$  einer entsprechenden Lichtquelle abhängig. Umgekehrt aber wurde das Linienelement der Steady-state Theory irrtümlicherweise gerade deshalb<sup>97)</sup> für ‚gleichbleibend‘ gehalten, weil sein konventioneller HUBBLE-Parameter sich wegen seines Skalenfaktors  $a_{\text{SST}} \equiv e^{Ht'}$  zu  $H_k^{\text{SST}}(t') \equiv \dot{a}_{\text{SST}}/a_{\text{SST}} = H$  als Konstante ergibt. Doch bei Berechnung der Rotverschiebung gemäß (9,6) folgen dort für ein und dasselbe in Ruhe befindliche kosmische Objekt *zeitlich veränderliche* Werte, was zu dem offenbar vergeblich angestrebten ‚gleichbleibenden Zustand‘ jenes Modells in eklatantem Widerspruch steht.

Eine nüchterne Betrachtung löst die Verwirrung leicht auf. Denn im Unterschied zum konventionellen ist der *signifikante* HUBBLE-Parameter einfach  $H_s(t') \equiv \dot{a}$ . Man braucht die herkömmliche Ableitung z.B. in [61] lediglich Schritt für Schritt unter die Lupe zu nehmen, um dies sofort einzusehen. Zunächst lautet die Verallgemeinerung des in (9,14) angegebenen stationären Linienelements zu einer beliebigen FLRW-Form bei fehlender ‚räumlicher Krümmung‘

$$d\bar{\sigma}_{(\text{FLRW})}^2 = c^2 dt'^2 - a^2 dl^{*2}, \quad (9,15)$$

und  $d\lambda_{\text{SRT}}$  aus (9,5 $\alpha$ ) geht dementsprechend über in

$$d\lambda_{\text{SRT}} \approx a dl^*. \quad (9,16)$$

Nun folgt aus (9,6) mit den Indizes ‚e‘ für ‚emittiert‘ und ‚b‘ für ‚beobachtet‘

$$z \equiv \frac{a(t'_b)}{a(t'_e)} - 1 \equiv \frac{\Delta a_{be}}{a(t'_e)} \approx \frac{\dot{a}}{a} \Delta t'. \quad (9,17)$$

Für Lichtsignale folgt aus (9,15) mit  $d\bar{\sigma}_{\text{FLRW}} = 0$  näherungsweise als Laufzeit zur Überbrückung einer ‚kleinen‘ universalen Distanz  $\Delta l^*$

$$\Delta t' \approx \frac{a \Delta l^*}{c} \quad (9,18)$$

und eingesetzt in (9,17) resultiert schließlich HUBBLES Gesetz in der *signifikanten* Form

$$cz \approx \dot{a} \Delta l^* \equiv H_s \Delta l^*. \quad (9,19)$$

Demgegenüber ergibt sich das gleiche Gesetz in seiner *konventionellen* Form, wenn im Hinblick auf (9,16) anstelle von (9,18) wie bisher üblich gesetzt wird

$$\Delta t' \approx \frac{\Delta l'}{c}, \quad (9,20)$$

---

tunabhängiger Rotverschiebung (9,7) behält ihre *konstante* mittlere Fluchtgeschwindigkeit für alle Zeiten bei (wie ein gleichbleibendes  $z$  eben zeigen würde, wenn es auf einen DOPPLER-Effekt zurückzuführen wäre).

<sup>96)</sup> Diese Aussage wird gewöhnlich bezüglich ‚mitbewegter‘ Koordinaten interpretiert, was natürlich an der – hier wie dort benutzten – unverzichtbaren Voraussetzung  $l^* = \text{konstant}$  nichts ändert.

<sup>97)</sup> s. z. B. [61].

wobei  $\Delta l'$  in Bezug auf Einheiten der *Eigenlänge* als ‚natürliche‘ Distanz betrachtet wird. Im Unterschied zu (9,19) folgt mit Einsetzung von (9,20) in (9,17) also die konventionelle Form des HUBBLE'schen Gesetzes zu

$$cz \approx \frac{\dot{a}}{a} \Delta l' \equiv H_k \Delta l'. \quad (9,21)$$

Diese Form aber ist *irreführend*, weil bei Anwendung auf ein und dieselbe nach Voraussetzung bezüglich ‚mitbewegter‘ Koordinaten ruhende kosmische Lichtquelle nicht die ‚natürliche‘ Entfernung  $\Delta l'$  zeitlich konstant ist, sondern die universale Distanz  $\Delta l^*$ . Bei Beachtung dieser Tatsache ergibt die Benutzung von (9,21) zur Berechnung der Rotverschiebung aus dem stationären Linienelement (9,14) am Ende das gleiche in (9,7) angegebene *zeitunabhängige* Resultat wie zuvor, weil sich die Zeitabhängigkeit des konventionellen HUBBLE-Parameters und die Zeitabhängigkeit der ‚natürlichen‘ Entfernung  $\Delta l'$  genau kompensieren. Wesentlich einfacher ist es allerdings – hier wie in anderen Fällen – die Rechnung von Anfang an in den universalen Koordinaten  $(t^*, r^*)$  auszuführen.

Die Rotverschiebung als fundamentale Beobachtungstatsache der Kosmologie wird im Rahmen des stationären Modells dadurch beschrieben, daß sich der signifikante HUBBLE-Parameter  $H$  als eine echte Naturkonstante erweist. Im Hinblick auf die ebenfalls zeitunabhängigen Werte der Rotverschiebung selbst gibt es also keinen Grund mehr, einen zeitlich veränderlichen – unglücklich definierten – konventionellen HUBBLE-Parameter weiterhin mit der hier auftretenden wahren HUBBLE-Konstanten  $H$  zu verwechseln.

### 9.2.b Die kosmischen Obergrenzen von lokaler Eigenlänge und Eigenzeit

Im Unterschied zu der fundamentalen Annahme der heutigen ‘Big-Bang’-Kosmologie soll nun mathematisch gezeigt werden, daß sich die FLRW-Koordinatenzeit  $t'$ ,  $T' \equiv T_H + t'$  durchaus *nicht* als eine einheitliche Eigenzeit verstehen läßt, die im gesamten Universum Gültigkeit beanspruchen könnte.

Denn obwohl die Aussagen der speziellen Relativitätstheorie auch in Bezug auf größere ‚lokale‘ Systeme sehr stark sind – wie sich aus den mit Atomuhren gemessenen konstanten Radien und Umlaufzeiten der Planetenbahnen ersehen läßt – ist es nicht gerechtfertigt, diese Aussagen ohne weiteres auf universale Zeitspannen und Entfernungen auszudehnen.

Überraschenderweise ergeben sich aus dem hier vorgeschlagenen relativistischen Ansatz eines unendlichen und – in Bezug auf hinreichend große Skalen – stationären Universums ganz von selbst Obergrenzen für lokal zusammenhängende kosmische Bereiche. Und zwar folgen diese aus der wechselseitigen Einwirkung von allgemeiner und spezieller Relativitätstheorie, was nach meinem Verständnis einem Zusammenspiel von Gravitation und Quantenmechanik entspricht.

Um die kosmischen Obergrenzen zusammenhängender Eigenlänge und Eigenzeit konkret aufzuzeigen, sei zunächst ein lokales Koordinatensystem  $S'$  von *Quasi-Eigenlänge* und *Quasi-Eigenzeit* definiert. Die entsprechenden Transformationsformeln ergeben sich nach vorheriger Umbenennung von  $(d\tau_{\text{SRT}}, d\lambda_{\text{SRT}})$  in  $(dt', dr')$  durch direkte Integration aus (9,5), wobei diese in der zweiten der dort angegebenen Relationen bei  $t^* = \text{konstant}$  auszuführen ist. Eine solche Umbenennung ist notwendig, weil die entstehenden Integrale  $(t', r')$  nicht uneingeschränkt als Eigenlänge bzw. Eigenzeit im Sinne der speziellen Relativitätstheorie verstanden werden können. Das ist evident aufgrund der einfachen Tatsache, daß andernfalls die dementsprechende Transformation des stationären Linienelements (9,3-4) zum Ergebnis  $t'^2 - r'^2 \equiv \sigma_{\text{SRT}}^2$  führen müßte, was aber unmöglich ist. Denn im Unterschied zu demjenigen der speziellen Relativitätstheorie muß der zu (9,3-4) gehörige RIEMANN-Tensor verschieden von Null sein, wenn daraus eine nicht-verschwindende Materie- bzw. Energiedichte folgen soll.

*Definition 4a* – Die integrierten Koordinaten  $(r', T')$  – wo mit  $T' \equiv T_H + t'$  der Wert  $t' = 0$  einem Zeitpunkt ‚heute‘ entspricht – sind in Bezug auf die universalen Koordinaten  $(r^*, t^*)$  implizit gegeben durch

$$\begin{aligned} t^* &\equiv \frac{\ln(HT')}{H} &\Leftrightarrow & dT' \equiv dt^* e^{Ht^*}, \\ r^* &\equiv \frac{r'}{HT'} &\Leftrightarrow & dr' \equiv dr^* e^{Ht^*} + Hr^* dt^* e^{Ht^*}. \end{aligned} \quad (9,22)$$

Bei Benutzung der beiden links stehenden Identitäten, in denen die Variable  $T' \equiv T_H + t'$  offensichtlich mit der FLRW-Koordinatenzeit in (9,13), (9,14) identisch ist, transformiert sich das stationäre Linienelement (9,3-4) exakt in das einfachste Linienelement, das sich in *quasi-natürlichen* Koordinaten schreiben läßt

$$d\bar{\sigma}'^2 = \left[ 1 - \left( \frac{r'}{cT'} \right)^2 \right] c^2 dT'^2 + 2 \left( \frac{r'}{cT'} \right) c dT' dr' - dr'^2 - r'^2 d\Sigma'^2, \quad (9,23)$$

wobei  $d\Sigma'$  das gewöhnliche Oberflächenelement einer Kugel vom Radius  $r' = 1$  LE sein soll. Der Grund für die Bezeichnung ‚quasi-natürliche‘ Koordinaten wird sofort daraus klar, daß es sich bei dem stationären Linienelement in der Form (9,23) um eine sehr gute Approximation an das Linienelement der speziellen Relativitätstheorie handelt. Dies gilt allerdings nur für *lokale* kosmische Bereiche, die zunächst offensichtlich durch die Bedingung  $r' \ll cT'$  begrenzt sind.

Im Hinblick auf die rechts stehenden Beziehungen von (9,22), zeigt deren zweite die Nicht-Integrabilität der entsprechenden Relation von (9,5). Trotzdem gilt offenbar  $dt_{\text{SRT}} \approx dt'$  und *zugleich* auch  $dr_{\text{SRT}} \approx dr'$ , und zwar in der Umgebung  $r' \approx 0$ . Damit ergeben sich als Näherungen tatsächlich die erwarteten Elemente *lokaler* Eigenlänge und *lokaler* Eigenzeit (9,5) – *nun aber einschließlich natürlicher Obergrenzen*.

Im Unterschied zum stationären Linienelement (9,3-4), ist das Linienelement (9,23) trotz seines willkürlich wählbaren Koordinatenursprungs außerhalb eines Bereichs vom Radius  $r'_{\text{maximum}} = cT'$  überhaupt nicht anwendbar. Speziell für  $r' \rightarrow cT'$  weicht das Linienelement (9,23) zunehmend stark von dem der speziellen Relativitätstheorie ab, was meines Erachtens als klarer Hinweis auf eine eingeschränkte, ausschließlich lokale Anwendbarkeit des ‚Big-Bang‘-Konzepts zu verstehen ist.

Denn eine Ersetzung von  $(r'/cT')$  durch  $(r^*/R_H)$  in (9,23) gemäß (9,22) bringt schließlich das in quasi-natürlichen Koordinaten geschriebene stationäre Linienelement in seine aussagestärkste Form mit

$$d\bar{\sigma}'^2 = \left[ 1 - \left( \frac{r^*}{R_H} \right)^2 \right] c^2 dT'^2 + 2 \left( \frac{r^*}{R_H} \right) c dT' dr' - dr'^2 - r'^2 d\Sigma'^2, \quad (9,24)$$

wobei die offensichtlichen Anwendbarkeitsgrenzen nun in Bezug auf die universale Entfernung  $r^*$  gegeben sind. Diese ist aber nach Voraussetzung – und im Einklang mit der Ableitung der Rotverschiebung (9,7) – mit den bei statistischer Mittelung ortsfesten Positionen der Galaxien ganz real verknüpft. Tatsächlich kulminieren die Anwendbarkeitsgrenzen gemäß (9,24) in der einfachen Bedingung

$$r^* \stackrel{!}{<} R_H \quad (9,25)$$

mit  $R_H \equiv c/H$  als ebenfalls zeitunabhängiger Kombination zweier Naturkonstanten. Wie andererseits oben erwähnt, ist der Ursprung irgendeines räumlichen Koordinatensystems grundsätzlich willkürlich wählbar. Daraus schließe ich, daß ein stationäres Universum gegebenenfalls mit lokalen kosmischen Regionen übersät ist, deren Radien jeweils die Bedingung (9,25) erfüllen, weil nur innerhalb entsprechender Bereiche die Konzepte von Eigenlänge und Eigenzeit der speziellen Relativitätstheorie *zusammenhängend* gelten können.

Im Hinblick auf das ‚Big-Bang‘-Konzept der heutigen Kosmologie folgt daraus, daß dieses bezüglich der universalen Koordinaten nur innerhalb ‚lokaler‘ kosmischer Bereiche einer maximalen räumlichen Ausdehnung  $R_H$  naiv anwendbar ist. Damit aber stellt sich schließlich die Frage, wie groß lokale ‚Big-Bang‘-Bereiche eines stationären Universums tatsächlich zu sein hätten. Diese Bereiche könnten gemäß (9,25) ja auch wesentlich kleiner sein als  $R_H$ . Insbesondere läßt sich meines Erachtens selbst ein mittlerer ‚Big-Bang‘-Radius von nur etwa  $r^*_{\text{BB}} \approx 0.01 R_H$ , der größenordnungsmäßig mit der Ausdehnung der beobachteten ‚Blasen‘ (*bubbles*) übereinstimmen würde, nicht von vornherein ausschließen. Andererseits könnten sogar bei dem sich spontan anbietenden Grenzwert  $r^*_{\text{BB}} \approx R_H$  – dessen Äquivalent  $z_{\text{universal}} \approx e - 1 \approx 1.7$  bemerkenswerterweise mit der maximalen Rotverschiebung der bisher gemessenen Supernova-Ia-Ereignisse übereinstimmt – einige Quasare mit  $z > 6$  kaum noch als Teil ‚unseres Kosmos‘ betroffen sein, wenn nicht zusätzlich die gewöhnliche Gravitationsrotverschiebung dieser möglicherweise extrem schweren *nicht-statischen* Objekte unerwartet große Beiträge liefert.

Innerhalb eines im Sinne von (9,25) zulässigen Bereichs aber scheint nach (9,24) die Eigenzeit bezüglich der FLRW-Koordinatenzeit  $T'$  gemäß  $dt_{\text{SRT}} \approx dt' [1 - (r^*/r_H)^2]^{1/2}$  an verschiedenen Orten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit zu verlaufen. Auch damit erweist sich die lokale Eigenzeit wieder als ungeeignet im Sinne einer gleichförmig ablaufenden kosmischen Zeit. Aus dem unmöglichen Grenzübergang  $T' \rightarrow 0$  in der FLRW-Form (9,14) folgt dementsprechend zuletzt einfach, daß es keine zusammenhängenden makroskopischen Strukturen geben kann, die in Bezug auf ihre Eigenzeit älter wären als  $T_H$ . Bei diesem Wert handelt es sich aber meines Erachtens keineswegs um das ‚Alter des Universums‘, sondern eher um die maximale Lebensdauer kosmischer Strukturen.

Für  $dT' = 0$  ergibt sich aus (9,24) exakt das *räumliche* Linienelement der speziellen Relativitätstheorie. Wären also in einem einzigen fiktiven Augenblick Materie und Energie perfekt homogen und isotrop über das gesamte Universum verteilt, dann würden selbst kleinste Prozesse – die notwendigerweise  $dT' \neq 0$  implizieren – genügen, diese perfekte Symmetrie schlagartig und auf Dauer zu brechen. Wer will, mag darin ein Konzept der Entstehung unseres lokalen Kosmos aus einer ‚Quantenfluktuation‘ in einem chaotisch stationären Hintergrunduniversum erkennen. Dazu sei die Anmerkung gestattet, daß eine solche Schlußfolgerung in erstaunlicher Weise – natürlich nicht wörtlich, durchaus aber grundsätzlich – einer Entstehungsgeschichte nahe kommt, in der von der Erschaffung der Welt aus einem *tohu w'a-bohu* gesprochen wird.

Trotz der Näherungsbeziehung  $dt_{\text{SRT}} \approx dt'$ , die sich – wie bereits festgestellt – aus (9,5) und (9,13) ableitet, gibt es signifikante Unterschiede zwischen diesen beiden Differentialen. Die erste der Relationen (9,5) ist bei isolierter Betrachtung mathematisch integrierbar. Doch bei *physikalischer* Betrachtung ist nur das Intervall  $dt'$  der Koordinatenzeit integrierbar,  $dt_{\text{SRT}}$  ist es nicht. Der Grund liegt darin, daß im Hinblick auf die spezielle Relativitätstheorie das Eigenzeit-Intervall  $dt_{\text{SRT}}$  eben *zusammen* mit  $dr_{\text{SRT}}$  definiert ist, und zwar nur lokal durch die erwähnte Beziehung  $d\sigma_{\text{SRT}}^2 = c^2 dt_{\text{SRT}}^2 - dr_{\text{SRT}}^2$ . Dieser Sachverhalt läßt sich kurz zusammenfassen in der Form

$$\left. \begin{array}{l} t' \approx t_{\text{SRT}} \\ r' \approx r_{\text{SRT}} \end{array} \right\} \text{ für } r^* \ll R_H. \quad (9,26)$$

Es bleibt somit unverzichtbar, die lokale Eigenzeit  $t_{\text{SRT}} \ll T_H$  von der integrierten (FLRW-)Koordinatenzeit  $t'$  zu unterscheiden, ebenso wie von einer anderen quasi-natürlichen Koordinatenzeit  $t$ , die sogleich zusätzlich zu definieren ist.

Es ist die *Kombination* der speziellen mit der allgemeinen Relativitätstheorie, die beweist, daß die mathematische Singularität bei  $T' = 0$  – wie von vielen vermutet – auf eine grundsätzliche Anwendbarkeitsgrenze schließen läßt, nicht aber auf einen Ursprung von Raum und Zeit. Ergänzend sei darauf hingewiesen, daß ein *exakter* Zeitpunkt  $T' = 0$  in Bezug auf die universale Zeit einfach die unendliche Vergangenheit  $t^* = -\infty$  bedeuten würde.

Obwohl es sich bei  $t'$ ,  $T'$  um die einfachste Quasi-Eigenzeit handelt, muß diese nicht zwangsläufig auch die *bestmögliche* Annäherung an  $t_{\text{SRT}}$  in unserer lokalen Raum-Zeit-Umgebung sein. Auf Basis des Linienelements (9,24) – d.h. bezüglich integrierter Koordinaten – gelten die MAXWELL'schen Gleichungen nicht einmal in 1. Ordnung von  $r^*/R_H \equiv Hr^*/c$ . Das wird besonders deutlich bei Berechnung der Koordinaten-Lichtgeschwindigkeit  $c'_{\pm} = \pm c (1 \pm r^*/R_H)$ . Um solche Abweichungen für die derzeitige Epoche  $t' \approx 0$  zu vermeiden, ist es notwendig, die Transformationsformel (9,22) durch Einführung adaptierter Koordinaten  $x^k$  zu verbessern:

*Definition 4b* – Die *adaptierten* Koordinaten  $(r, t)$  – wobei mit  $t \equiv T_H + t$  der Zeitpunkt  $t = 0$  wieder ‚heute‘ bedeutet – sind in Bezug auf die universalen Koordinaten  $(r^*, t^*)$  implizit gegeben durch

$$\begin{aligned} t^* &\equiv \frac{\ln(1+Ht)}{H} - \frac{1}{2} \frac{Hr^2}{c^2} &\Leftrightarrow & dt^* \equiv \frac{dt}{1+Ht} - \frac{Hr dr}{c^2}, \\ r^* &\equiv \frac{r}{1+Ht} &\Leftrightarrow & dr^* \equiv \frac{dr}{1+Ht} - \frac{Hr dt}{(1+Ht)^2}. \end{aligned} \quad (9,27)$$

Im Unterschied zu den integrierten Koordinaten – die offensichtlich mit den adaptierten näherungsweise übereinstimmen, solange gilt  $r \equiv r^* \ll R_H$  – sind nur die adaptierten Koordinaten  $(r, t)$  geeignet, das stationäre Lini-

enelement (9,3-4) bis auf Abweichungen *zweiter* Ordnung  $O^2(Ht, Hr/c)$  näherungsweise in das der speziellen Relativitätstheorie zu transformieren. Das Ergebnis werde hier angegeben in der Form

$$d\bar{\sigma}^2 = e^{-\left(HT \frac{r^*}{R_H}\right)^2} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{r^*}{R_H} \right)^2 \right] c^2 dT^2 + 2(1 - H^2 T^2) \left( \frac{r^*}{R_H} \right) c dT dr - \left[ 1 - \left( H^2 T^2 \frac{r^*}{R_H} \right)^2 \right] dr^2 - r^2 d\Sigma^2 \right\} \quad (9,28)$$

wobei wieder  $d\Sigma^2 \equiv \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2$  gelten soll. Die Lichtgeschwindigkeit in Bezug auf adaptierte Koordinaten ergibt sich hieraus zu

$$c_{\pm}^{\text{adaptiert}} = \pm c \frac{1 \pm \frac{r^*}{r_H}}{1 \pm \frac{r^*}{r_H} (HT)^2} \quad (9,29)$$

Für die gegenwärtige Zeit gilt  $t=0 \Leftrightarrow HT=1$  und damit also – anders als in Bezug auf integrierte Koordinaten – tatsächlich  $c_{\pm}^{\text{adaptiert}} \approx \pm c$ . Das adaptierte Linienelement (9,28) selbst geht unter der gleichen Voraussetzung näherungsweise über in

$$d\bar{\sigma}_{(T:=T_H)}^2 \approx e^{-\left(\frac{r^*}{R_H}\right)^2} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{r^*}{R_H} \right)^2 \right] \left[ c^2 dT^2 - dr^2 \right] - r^2 d\Sigma^2 \right\} \quad (9,30)$$

Aus (9,28-30) ist zu ersehen, daß auch die adaptierte Koordinatenzeit  $t$  also, obwohl es sich dabei um die für  $T \rightarrow T_H$  bestmögliche Annäherung an das lokale Eigenzeit-Integral  $t_{\text{SRT}}$  handelt, wegen der ortsabhängigen Ganggeschwindigkeit nicht als eine *universale* Eigenzeit dienen kann.

Eine maximale Eigenzeit  $T_H$  aber läßt sich verstehen als Konsequenz der prinzipiell nicht überschreitbaren Anwendbarkeitsgrenze der Relativitätstheorie in der Art etwa, wie es – mit Vorbehalt – der SCHWARZSCHILD-Radius auf der anderen Seite zu sein scheint. Gerade diese zuletzt genannte Grenze der makroskopischen physikalischen Beschreibung könnte es auch sein, hinter welcher sich diejenigen Prozesse abspielen sollten, die bei jeweils lokaler Abnahme der Entropie für eine statistisch-stationäre Neubildung aller kosmischen Strukturen unverzichtbar wären. Eine solche Interpretation wäre auch insofern befriedigend, als meines Erachtens *innerhalb der Physik* weder ein Beginn des gesamten Universums, noch die Existenz ewiger makroskopischer Strukturen vorstellbar sind.

Die quasi-natürlichen Formen (9,23), (9,28) des stationären Linienelements belegen anschaulich die Unmöglichkeit, ohne irgendeine Koordinatenzeit in Ergänzung zur lokalen Eigenzeit auszukommen. Selbst die unbestreitbare Möglichkeit, die universale Koordinatenzeit mathematisch in beliebige andere Formen zu transformieren, kann die prinzipielle Notwendigkeit ihrer Existenz nicht verdecken. Darauf kommt es hier an.

Wie bereits in [2] gezeigt, ist auch für die allgemeinen Relativitätstheorie eine *einheitliche* – in NEWTONS Worten [62] ‚mathematische‘ – Zeit unverzichtbar, die hier als ‚Koordinatenzeit‘ auftritt. Es ist entscheidend, daß es sich bei der FLRW-Koordinatenzeit eben nicht um eine echte Eigenzeit  $t_{\text{SRT}}$ , sondern lediglich um die Quasi-Eigenzeit  $t'$  handelt. Damit schließlich entfällt die entscheidende Begründung dafür, der FLRW-Zeitkoordinate  $t'$  eine bevorzugte Stellung gegenüber der Zeit  $t^*$  des stationären Universums einzuräumen.

Wenn außerdem die Rotverschiebung – wie im vorausgegangenen Abschnitt festgestellt – nicht notwendigerweise mit einer realen Flucht der Spiralnebel verbunden ist, dann muß es auch keineswegs eine Entstehung des *gesamten* Universums in einem ‚Urknall‘ gegeben haben. Vielmehr gelangt man – naiv in der Zeit rückwärtsschreitend – zu einem Szenario, in welchem heutige feste Strukturen theoretisch so groß gewesen wären, daß sie einander berührt und gegebenenfalls den gesamten Raum gleichmäßig erfüllt hätten.

Nichts anderes würde aus den Beziehungen (9,5) und (9,13) im Hinblick auf ein stationäres Universum folgen, soweit alle heutigen Strukturen gleichzeitig entstanden wären. Denn es ist klar, daß aus dieser Sicht alle lokalen Objekte gegenüber den – in Form gleichbleibender Werte der Rotverschiebung gemessenen – festen Abständen zwischen den Galaxien schrumpfen<sup>98)</sup>.

<sup>98)</sup> Unter den oben gemachten Vorbehalten könnte das zwar umgekehrt auch so ausgedrückt werden, daß sich bezüglich schrumpfender Objekte *und* Maßstäbe in einem stationären Universum der leere Raum in relativer Expansion befände. Doch

In der Zeit zurückblickend stellt sich daraufhin die Frage: Wann in der Vergangenheit wären die schrumpfenden Strukturen so groß gewesen, daß sie möglicherweise aneinander stießen? Denkt man hier beispielsweise an Galaxien, Cluster oder Supercluster, so würde eine grobe Schätzung ergeben, daß diese Objekte nicht früher in Form permanenter Strukturen existiert haben können als etwa seit der Zeit  $T \approx T_H/100 - T_H/10$ , falls sie überhaupt *alle* gleichzeitig entstanden sind.

Dies auf die Spitze getrieben, ließe sich weiterfragen, zu welcher *universalen* Zeit  $t_\alpha^*$  eine Struktur der modifizierten PLANCK-Länge  $r_\alpha \equiv (h/ec)\sqrt{G}$  gerade eine Ausdehnung in der Größe des HUBBLE-Radius  $R_H \equiv cT_H$  gehabt hätte. Das Ergebnis entspräche bei Berechnung in integrierten Koordinaten exakt dem universalen Zeitpunkt  $t_\alpha^*$ , der durch  $Ht_\alpha^* \equiv \ln(r_\alpha/R_H) - 1 \equiv -1/\alpha$  gegeben ist – mit  $\alpha$  als der SOMMERFELD'schen Feinstrukturkonstanten – falls sich der genaue Wert der HUBBLE-Konstanten eines Tages als 64,7 km/s/Mpc herausstellen sollte. Dies sei hier deshalb erwähnt, weil ähnliche Kombinationen zu Ergebnissen gleicher Größenordnung führen. Daß die mit natürlichen Maßstäben gemessenen Dichten für  $T' \rightarrow 0$  niemals unendlich groß gewesen sein müssen, liegt hiernach daran, daß das Konzept von Eigenlänge und Eigenzeit bereits mit Annäherung von  $T' \rightarrow T_\alpha \equiv T_H e^{-1/\alpha}$  an seine PLANCK-Grenzen stößt und über große Entfernungen für  $T' \rightarrow 0$  jedenfalls vollends zusammenbricht.

In umgekehrter Entsprechung zu dem allgemein bekannten Widerstreit zusammenhängender Strukturen gegen Auflösung und Zerfall, würde es in einem stationären Universum auch einen Widerstreit zwischen einem großräumigen entropischen Gleichgewicht gegen eine wiederkehrende lokale gravitative Neuschöpfung geben. Im Hinblick auf die natürliche Tatsache schließlich, daß alle makroskopischen Strukturen entstehen und vergehen, gibt es keinen *physikalischen* Grund für einen Anfang von Raum und Zeit.

Es grenzt in meinen Augen an ein Wunder, daß sich aus dem Konzept eines unendlichen stationären Universums – im Wechselspiel der durch allgemeine und spezielle Relativitätstheorie makroskopisch repräsentierten Phänomene von Gravitation und Quantenmechanik – lokale kosmische Strukturen maximaler kohärenter Ausdehnung gewissermaßen von selbst ergeben.

### 9.3 Die Frage einer weitergehenden Quantisierung der Gravitation

EINSTEINS Äquivalenzprinzip impliziert, daß sich die Gravitation in frei fallenden, hinreichend leichten Systemen nicht bemerkbar macht. Es gibt keinen anderen Grund, von vornherein die Möglichkeit einer Mitwirkung des Fundamentaltensors  $g_{ik}$  und seiner Ableitungen beim Aufbau elementarer Teilchen auszuschließen. Warum also sollte sich ein konsistentes Variationsprinzip nicht auch bezüglich der Gravitation zur Erfassung bisher verborgener Details erweitern lassen? Eine solche Frage ist nicht zuletzt deshalb berechtigt, weil EINSTEINS Theorie hinsichtlich der Problematik einer – insbesondere auch Gravitationswellen betreffenden – Energiedichte des Gravitationsfeldes bisher keine vollständig befriedigenden Antworten geben kann.

Vor allem die Möglichkeit einer Einbeziehung des Windungstensors ist unter diesem Aspekt genauer zu prüfen, obwohl sie mit dem Äquivalenzprinzip in seiner bisherigen Form unvereinbar<sup>99)</sup> scheint. Doch braucht sich dessen makroskopisch erwiesene Gültigkeit nicht zwangsläufig bis in aller kleinste Bereiche des Mikrokosmos zu erstrecken. In der Umgebung von Elementarteilchen ist das Äquivalenzprinzip wegen des Fehlens frei fallender lokaler Inertialsysteme jedenfalls nicht unmittelbar überprüfbar – und wird damit dort *fragwürdig*. Es scheint demzufolge nicht von vornherein unmöglich, daß die Gültigkeit des Äquivalenzprinzips auf makroskopische Bereiche begrenzt ist, in denen Licht als das Wellenphänomen der konventionellen Elektrodynamik beschrieben werden kann. Bezeichnenderweise steht dessen ‚klassische‘ *Interferenz* mit den Versuchen MICHELSONS am Anfang der Relativitätstheorie.

Eine solche Verletzung des Äquivalenzprinzips aber würde nicht nur die Existenz eines Windungstensors erlauben, sondern die detaillierte Gültigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie für den Mikrokosmos überhaupt in Frage stellen. Ohne mikroskopisches Äquivalenzprinzip *könnte* EINSTEINS Geometrisierung der Gravitation nicht mehr sein als eine makroskopische Analogie. Es ist in dem Zusammenhang bemerkenswert, daß sowohl

---

nach Ansicht des Verf. ist diese – hinsichtlich der Abmessungen eines möglichen Anfangszustands irreführende – Hypothese schlicht überflüssig, und das ganze Problem (gemäß Fußn. 8) im Sinne größtmöglicher Einfachheit zu behandeln.

<sup>99)</sup> Und zwar, weil in diesem Fall nicht in jedem Punkt die Einführung eines lokal-geodätischen Koordinatensystems möglich ist (s. z. B. [24], dies wird dort zugleich überzeugend und einfach begründet).

das Dilemma einer Urknall-Singularität des gesamten Universums als auch die vermeintliche Unvereinbarkeit der allgemeinen Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik ihren gemeinsamen Ursprung in dieser keineswegs zwingenden geometrischen Auffassung haben, d.h. letztlich in der – auch bei durchgängiger Gültigkeit des Äquivalenzprinzips – unnötigen Behandlung von Raum und Zeit als physikalischen Größen.

Daß die nicht-lineare allgemeine Relativitätstheorie trotz statistischer Glättung überhaupt näherungsweise auf makroskopische Objekte anwendbar ist, liegt meines Erachtens in der Additivität der Quellen des Gravitationsfeldes begründet. Diese Additivität könnte als ein *Koexistenzprinzip* nicht-linearer Strukturen eine ähnliche Rolle spielen wie das Superpositionsprinzip für lineare Felder.

Die EINSTEIN'schen Gleichungen in der aus dem konsistenten Variationsprinzip (6,1-3) abgeleiteten Form schließen – wie oben gesehen – erstmals einen quantisierten Energie-Impuls-Tensor der Materie ein. Es scheint nicht ausgeschlossen, daß eine über die Quantisierung seiner Quellen hinausgehende Quantisierung des Gravitationsfeldes selbst, beispielsweise gemäß

$$\ddot{\Phi}_G = \frac{1}{2\kappa} \sum_K \mathbf{G}_K,$$

in der Natur realisiert sein könnte, was für die in (6,2), (6,3) auftretenden  $g_{ik}$  versuchsweise etwa mit dem Ansatz

$$g_{ik} = \prod_K g_{ik}^K$$

zu kombinieren wäre. Allerdings sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die beiden zuletzt angegebenen Gleichungen lediglich als Fragen zu verstehen sind. Der Versuch zu ihrer Beantwortung muß einer zukünftigen Entwicklung vorbehalten bleiben.

## 10. Rückblick und Ausblick

Natürlich soll hier nicht der Eindruck erweckt werden, als könne ein Weg zurückführen von der heutigen Quantenmechanik in eine deterministische Welt, die wohl immer nur eine – meines Erachtens gleichermaßen naive wie anmaßende – Illusion gewesen ist. Wären die Abläufe in der Natur streng determiniert, so hätte es gar keinen Sinn, von Ursachen und Wirkungen zu sprechen. Determinismus und Kausalität (s. Abschn. 4.1) verhalten sich zueinander komplementär.

Wie bereits in der historischen Entwicklung der Quantenmechanik, so ist auch der hier beschrittene Weg – obwohl von der klassischen Physik herkommend – ein Weg ohne Wiederkehr. Rückblickend ist es erstaunlich, wie einfach sich dieser finden läßt, indem aus den dynamischen Paradoxa der relativistischen Mechanik sowie aus der inneren Unvollständigkeit der bisherigen Elektrodynamik einige notwendige Schlüsse gezogen werden.

Die in der Atomphysik zwangsläufig auftretenden Unschärfen, die in den HEISENBERG'schen Relationen ihren prägnantesten Ausdruck finden, werden seit langem vermeintlich unverständlichen Naturgesetzen zugeschrieben, die das Verhalten von Punktteilchen bestimmen sollen. Aus Sicht der hier entwickelten Vorstellungen aber treten die Unschärfen aufgrund der Ausdehnung veränderlicher – in ihren jeweiligen Details weitgehend unbekannter – Strukturen auf, wohingegen die dahinterstehenden Naturgesetze klar und einfach sind. Insbesondere kann ein grundsätzlicher Unterschied bereits in der Fragestellung selbst liegen, wie am Beispiel des H-Atoms erkennbar wurde. Die Linearität der SCHRÖDINGER-Gleichung – und das betrifft unmittelbar auch das Superpositionsprinzip – erweist sich dort als eine *Näherung*, wenn die Rückwirkung des Elektronenfelds auf das Proton konsequent beachtet wird.

Nach meiner Überzeugung ist die Wirklichkeit viel zu komplex, um aus seltsamen Aspekten physikalischer Theorien, und seien diese numerisch noch so erfolgreich, revolutionäre naturphilosophische Schlüsse zu ziehen. Andererseits wiederum zeigt die Natur auch einfache Züge, welche sich erkennen lassen von dem, der nicht *zu scharf* sieht. Im besten Fall nämlich gerade so scharf, wie es dem begrenzten menschlichen Fassungsvermögen eben zuträglich ist. Daß eine physikalische Theorie grundsätzlich eine gewisse Unschärfe aufweisen muß, um brauchbar zu sein, widerspricht keineswegs der strikten Forderung, daß sie *präzise* zu sein hat innerhalb der durch die eigenen Voraussetzungen von Anfang an implizierten begrifflichen Grenzen. Wo aber die Beschrei-

bung der Wirklichkeit durch eine Theorie in Konflikt mit ersten Prinzipien der Naturwissenschaft gerät<sup>100)</sup>, da muß das nicht an der Wirklichkeit liegen.

Auch hinsichtlich der hier skizzierten offenen Theorie sei noch einmal darauf hingewiesen, daß ein physikalisches Welt-Bild am Ende nicht schärfer sein kann als die Körnung der verwendeten Farben. Es ist klar, daß eine erste Verfeinerung darin liegen sollte, den Eigendrehimpulsen der beteiligten Objekte – und damit zugleich dem Phänomen der elementaren Polarisierung – Rechnung zu tragen. Doch ansonsten sind nicht einmal Rahmen und einzelne Bestandteile des Bildes fest vorgegeben, da sich infolge von Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen die Anzahl der Teilchen ständig ändert, über die im zugrundegelegten Variationsprinzip zu summieren ist. Offenbar sind aus dieser von Anfang an als veränderlich anzusetzenden Anzahl zusätzliche Schlüsse zu ziehen, die möglicherweise auch aus einer Erweiterung des üblichen Variations-Verfahrens ableitbar sind.

Überhaupt bleibt festzuhalten, daß im Vergleich mit der historisch gewachsenen Theorie – trotz weitgehend identischer Grundgleichungen – viele berechnete Fragen auftauchen, die sich auf Anhieb kaum alle formulieren und einordnen, geschweige denn vollständig klären lassen. Grundsätzlich sollte sich alles, was von der konventionellen Quantenmechanik bzw. von der Quantenelektrodynamik mathematisch zutreffend beschrieben wird, in das gegebenenfalls zu erweiternde deduktive Konzept einfügen lassen. So sollte sich hier beispielsweise die viel diskutierte Reduktion eines Wellenpakets als Reduktion der Unkenntnis über den Zustand von Teilchen nach einer Messung – oder genauer: nach jeder grundsätzlich meßbaren Wechselwirkung – verstehen lassen, nachdem es durchaus keine Überraschung darstellen kann, daß der Zustand einer ausgedehnten deformierbaren Ladungsverteilung durch den Meßprozeß selbst verändert wird<sup>101)</sup>.

Erst die fortgesetzte Gegenüberstellung charakteristischer physikalischer Situationen wird zeigen können, wie die neuen Aspekte mit den numerisch exzellent bewährten bisherigen Verfahren in jedem konkreten Fall zu vereinbaren sind, bzw. in welcher Form die hier vorgeschlagene offene Theorie zu vertiefen ist. Diese steht eben erst am Anfang, doch ist dieser Anfang grundsätzlicher Natur.

Erklärtes Ziel des Konzepts einer einheitlichen Theorie von Elektrodynamik, Gravitation und Quantenmechanik ist es, physikalisch konsistente Zusammenhänge herzustellen zwischen Bereichen, die trotz wohl bekannter Korrespondenzen und Analogien letztlich ohne inneren Zusammenhang nebeneinanderstanden. Dementsprechend sehe ich nach wie vor eine lohnende Aufgabe darin, die historisch gewachsene Kluft zu schließen zur ‚revolutionären‘ Quantenmechanik, zu welcher bisher keine Brücke zu führen schien. Es besteht meines Erachtens die Chance, daß die hier skizzierte Theorie – wenn sie in erweiterter Form zur vollen Entfaltung kommt – eine Bezeichnung wie *klassisch* im Sinne von klar, konsistent und widerspruchsfrei tatsächlich einmal verdienen könnte<sup>102)</sup>. Schon jetzt ist deutlich erkennbar, daß es sich dabei jedenfalls um eine Theorie ausgedehnter Teilchen und demzufolge ‚nicht-lokaler‘ Wechselwirkungen handeln wird. Bereits in der vorliegenden Arbeit wurde nirgendwo die Ausdehnungslosigkeit irgendwelcher punktförmiger Teilchen vorausgesetzt – für das einzelne freie Elektron nicht einmal Lokalisierbarkeit überhaupt.

Die Entwicklung des hier zugrunde gelegten Variationsprinzips, das im Unterschied zu seinen Vorläufern erstmalig einen Energie-Impuls-Tensor impliziert, der sich als konsistent erweist und bis auf die Erfassung von Eigendrehimpulsen den Ansprüchen zu genügen scheint, läßt sich zurückverfolgen bis in das Jahr 1900 der PLANCK'schen Entdeckung des Wirkungsquantums. Als charakteristische Stufen der Entwicklung sind die entsprechenden Wirkungsintegrale in Tafel 2 zusammengestellt. Im letzten Ausdruck ist dort analog zu der bereits oben eingeführten Abkürzung (7,6) die sinngemäße Entsprechung  $\tilde{a}_i^{\bar{K}} \equiv a_i^{\bar{K}} + (c/e_K) s_i^K$  verwendet. Gleichung (10,4) stimmt mit (8,11) überein und wurde hier lediglich zur direkten Gegenüberstellung wiederholt.

<sup>100)</sup> Dies betrifft auch gewisse Aspekte der *Interpretation* von Quantenmechanik und Relativitätstheorie, wobei nicht selten die mehrdeutige Verwendung ursprünglich eindeutiger Begriffe zur Verwirrung beiträgt (s. a. Fußn. 8).

<sup>101)</sup> Auf Basis des Anteils (6,1-2) der hier zugrundegelegten Wirkungsdichte hätte die bisherige (nicht kovariante) KLEIN-GORDON-Gleichung unter rein logischen Aspekten mitsamt zugehörigem Energie-Impuls-Tensor und daraus fließenden Konsequenzen sogar bereits unmittelbar nach 4-dimensionaler Formulierung der speziellen Relativitätstheorie abgeleitet werden können. Es scheint mir eher unwahrscheinlich, daß in diesem Fall die Frage nach SCHRÖDINGERS Katze je gestellt worden wäre.

<sup>102)</sup> Es ist absehbar, daß es Einwände geben wird, doch glaube ich jedenfalls gezeigt zu haben, daß EINSTEIN, DEBROGLIE, SCHRÖDINGER und andere grundsätzlich recht hatten, sich nicht mit einem positivistischen Zugang zu den atomaren Grundlagen der Physik zufrieden geben zu haben.

Es ist augenscheinlich, daß LARMORS ursprüngliches Ziel, wie etwas später auch das SCHWARZSCHILDs, in der Erfassung der MAXWELL'schen Gleichungen lag, wobei ihm die auf POINCARÉ und MINKOWSKI zurückgehende Schreibweise mit Vierer-Vektoren und -Tensoren bzw. deren Dichten noch nicht zur Verfügung stand. HILBERT hat diesbezügliche Ansätze MIES und EINSTEINS zusammengefaßt, was es ihm erlaubte, einen Energie-Impuls-Tensor abzuleiten, der allerdings zu EINSTEINS phänomenologischem Gegenstück nicht kompatibel war. Dies erreichte erst WEYL dadurch, daß er sein Wirkungsintegral vor der Variation gemäß (8,11) teilweise ausführte, was zwar auf eine Vermischung phänomenologischer Feld- und Teilchenaspekte hinausläuft, dafür aber bis heute die Basis der konventionellen Elektrodynamik (s. [24]) darstellt.

$$\text{LARMOR (1900):} \quad S = \int \left[ \frac{1}{4} F^{lm} F_{lm} + A_l j^l \right] d\Omega, \quad (10,1)$$

$$\text{HILBERT (1915):} \quad S = \int \left[ \frac{1}{4} F^{lm} F_{lm} + A_l j^l + \frac{1}{\kappa} \mathbf{R} \right] d\Omega, \quad (10,2)$$

$$\text{WEYL/a (1918):} \quad S = \int \left[ \frac{1}{4} F^{lm} F_{lm} + A_l j^l + \mu_0 c^2 + \frac{1}{\kappa} \mathbf{G} \right] d\Omega, \quad (10,3)$$

$$\text{WEYL/b (1918):} \quad S = \frac{1}{4} \int F^{ik} F_{ik} d\Omega + \sum \frac{e_0}{c} \int A_i dx^i + \sum m_0 c \int ds + \frac{1}{\kappa} \int \mathbf{G} d\Omega, \quad (10,4)$$

$$\text{Hier:} \quad S = \int \left[ \sum_K \left( \frac{1}{4} \mathbf{f}_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}} + \frac{1}{2} \tilde{a}_l^{\bar{K}} \tilde{j}_K^l + \frac{1}{2} \mathbf{m}_K c^2 q_K^2 - \frac{\hbar^2}{2m_K} \mathbf{q}_K^l q_l^K \right) + \frac{1}{2\kappa} \mathbf{R} \right] d\Omega. \quad (10,5)$$

Tafel 2: Zur historischen Entwicklung eines einheitlichen Variationsprinzips

Bereits POINCARÉ hatte eine konsistente Elektrodynamik als Ziel vor Augen<sup>103)</sup>, als er den später nach ihm benannten skalaren Druck einführte, der allerdings im Unterschied zu dem hier eingeführten Quantenskalor  $Q$  mitsamt zugehörigem Spannungstensor nicht die wechselseitige Stabilität im Atomen und Molekülen, sondern damals die einseitige Stabilität der geladenen Teilchen selbst gewährleisten sollte.

Im Rückblick auf seinen Versuch aber, den Zusammenhalt des Elektrons trotz gegenseitiger Abstoßung seiner Bestandteile zu erklären, bleibt zuletzt anzumerken, daß es nach der hier entwickelten Theorie ein lokalisierbares freies Elektron als einzelnes Teilchen gar nicht geben mußte. Es ist bemerkenswert, daß sich die Elektrodynamik – wie oben geschehen – konsistent erweitern läßt, ohne auf dieses Problem überhaupt einzugehen.

### 10.1 Offene Fragen und einige Möglichkeiten zur Vertiefung des vorgelegten Konzepts

Auch im Rückblick auf die der gesamten hier skizzierten Entwicklung zugrundegelegten dynamischen Paradoxa bleiben einige Fragen. Denn der neue Teilchenbegriff der quantisierten Elektrodynamik gibt nicht eine eindeutige explizite, sondern ‚nur‘ die grundsätzliche Antwort auf die in Abschnitt 4 besprochene Problematik.

Werden die dort kurz rekapitulierten Modelle von Teilchen in begrenztem Volumen, Rotator oder Oszillator als makroskopische Phänomene betrachtet, so sollten sich die Paradoxa durch geeignete Einbeziehung von Elastizität, Wärme und Reibung auflösen lassen. Allerdings kann es bei Berücksichtigung der unvermeidlichen Wärmestrahlung überhaupt keine makroskopischen abgeschlossenen Systeme geben. Andererseits fallen Elastizität, Wärme und Reibung bei mikroskopischer Betrachtung der gleichen Modelle als Erklärungsmöglichkeiten fort, und es bleibt nur die quantisierte Elektrodynamik. Diese bezieht grundsätzlich immer *alle* geladenen sowie

<sup>103)</sup> Und vielleicht schwebte ihm sogar die Notwendigkeit einer bevorstehenden ‚Revolution‘ als Konsequenz der speziellen Relativitätstheorie vor, als er gesagt haben soll, daß er „... kopfscheu würde angesichts der sich auftürmenden Hypothesen, deren Einordnung in ein System ihm schwierig bis zur Grenze der Unmöglichkeit erschien.“ [63], S. 109 (ich glaube, POINCARÉ richtig zu verstehen, wenn ich das Wort ‚Hypothesen‘ hier eher als ‚Konsequenzen‘ lese).

die ungeladenen, aber aus geladenen Bestandteilen zusammengesetzte Teilchen ein, wobei atomar zusammengesetzte makroskopische Objekte als eine *andere* Art von ‚Wellenpaketen‘ erscheinen.

Die bei der Herleitung des Schlüssels zur Erweiterung der Elektrodynamik in Abschnitt 5 verwendete makroskopische Beziehung  $U_i U^i = 1$  kann im Hinblick auf die Wellengleichung des Formskalars (6,27) bei Berücksichtigung der Identitäten (6,21) nur näherungsweise auf das mikroskopische Bild übertragen werden. Dort gilt nämlich stattdessen die bereits oben abgeleitete Beziehung (6,28), die beim formalen Übergang  $\hbar \rightarrow 0$  in die zunächst verwendete makroskopische Beziehung übergeht. Dies entspricht exakt dem bereits in 6.3.a durchgeführten Übergang von der Wellengleichung zur HAMILTON-JACOBI-Gleichung

In der Einleitung zu Abschnitt 6 wurde die Frage aufgeworfen, ob eine endgültige Wirkungsichte  $\Phi$  nicht – bis auf Divergenzterme – mit der Ruhmassendichte  $\mu_{\text{System}}$  eines jeweiligen ‚abgeschlossenen‘ Systems übereinstimmen sollte. Die in einem vorausgegangenen Abschnitt erhaltene Beziehung (6,88) zeigt, daß dies im vorliegenden Fall zumindest annähernd der Fall ist, wenn wie in (1,2) die Wirkungsichte des Gravitationsfeldes  $\Phi = \mathbf{R}$  anstatt  $\mathbf{G}$  verwendet wird, wodurch sich die erhaltenen Grundgleichungen nicht ändern.

Eine andere Frage wäre, ob sich die in (6,2) bzw. (10,5) auftretende Ruhenergiedichte  $\mu_K c^2 \equiv \mathbf{m}_K c^2 q_K^2$  etwa als  $\frac{1}{2} \mathbf{f}_K^{lm} f_{lm}^K \equiv \vec{B}_K^2 - \vec{E}_K^2$  einordnen ließe, um so zum Bild eines einzigen elektromagnetischen Feldes – aber auch zum Problem der Selbstenergie – zurückzukehren, doch soll darauf hier nicht weiter eingegangen werden.

Interessant wäre es außerdem, der erwähnenswerten Tatsache nachzugehen, daß sich in frei fallenden lokalen Inertialsystemen bei einer geeigneten Um-, ‚Eichung‘  $g_{ik}^{\text{neu}} \rightarrow \zeta g_{ik}^{\text{lokal}} \approx \zeta \eta_{ik} \equiv \zeta (+1, -1, -1, -1)$  der letzte Summand der runden Klammer durch den letzten Summanden der eckigen Klammer kompensieren läßt. Mit  $\zeta \equiv \text{konstant} \cdot Q^2$  nämlich folgt dann  $\mathbf{G}^{\text{neu}} = 6 \text{konstant} \cdot \mathbf{Q}^i Q_i$ , was bis auf die Problematik der Summenbildung bezüglich der runden Klammer den behaupteten Sachverhalt erkennen läßt<sup>104)</sup>. Es könnte darüberhinaus von Interesse sein, diesen Zusammenhang mitsamt dem Energie-Impuls-Tensor (6,99) den verschiedenen Formen bekannter *Skalar-Tensor-Theorien* gegenüberzustellen.

Schließlich ist noch eine Bemerkung zur Indizierung der von der Wirkungsichte (6,1-3) einzeln erfaßten Teilchen angebracht. Im Ansatz (6,1) ist über alle ruhmassebehafteten Elementarteilchen zu summieren. Das wirft Fragen auf: Wie viele sind alle? Diese Anzahl ist jedenfalls nicht konstant. Zu welchem Zeitpunkt und in Bezug auf welchen Beobachter wird die Existenz von Teilchen festgestellt, die sich bei hinreichend intensiven Wechselwirkungsprozessen doch ineinander umwandeln? Angesichts der Tatsache, daß es insgesamt keine Ladung trägt, wäre *ein* Neutron wohl als (mindestens) *drei* Teilchen – (p, e,  $\bar{\nu}$ ) bzw. (u, d, d) – zu zählen.

Es ist klar, daß die Theorie der Erweiterung bedarf. Doch sehe ich in dieser Aufgabe weniger einen Mangel als vielmehr eine Chance. Das erstaunliche ist, daß sich bereits aus dem hier vorgelegten Variationsprinzip (6,1-3) sehr weitreichende Schlüsse ziehen lassen, ohne die zuletzt aufgeworfenen Fragen überhaupt explizit beantworten zu müssen.

Als Möglichkeiten zur Vertiefung dieses konsistenten Variationsprinzips kommen grundsätzlich alle Ansätze in Frage, die einem heuristischen Prinzip der offenen Theorie genügen: *Jede mit der konventionellen Elektrodynamik als makroskopische Näherung verträgliche Wirkungsichte könnte in der Natur realisiert sein, falls der jeweiligen Erweiterung zusätzliche Kontinuitätsgleichungen zugrundeliegen, die mit entsprechenden Symmetrien einhergehen und umgekehrt.* Ob aber ein daraus resultierender Energie-Impuls-Tensor  $T_i^k$  tatsächlich der Wirklichkeit entspricht, kann nur die Erfahrung zeigen. Sollte sich andererseits erweisen, daß solche Anforderungen nur unter ganz speziellen Voraussetzungen erfüllbar sind, so könnten sich strenge, nicht-lineare Lösungen am Ende möglicherweise als bekannte – oder auch unbekannte – Elementarteilchen herausstellen.

Insbesondere scheint es nicht ausgeschlossen, daß neben der Berücksichtigung von Spinoren auch die Hinzunahme weiterer mathematischer Strukturen wie der kovarianten Ableitung in der Form  $\{A_{k;i} + A_{i;k}\}$  schließlich zu konsistenten Erweiterungen von  $T_i^k$  führen könnte. Denn das Auftreten eines *vollständigen* Ausdrucks  $A^{m;l} A_{m;l}$

<sup>104)</sup> In diesem Zusammenhang sei auch darauf hingewiesen, daß der von EINSTEIN gegen die WEYL'sche Erweiterung der Theorie erhobene Einwand (s. dazu z.B. PAULI [16]) seine Überzeugungskraft weitgehend einbüßt, wenn die elektromagnetischen Potentiale im Sinne der Erweiterung (5,12-13) bzw. (6,5) verstanden werden. Dann nämlich würde gerade die Quantenmechanik dafür sorgen, daß die Spektrallinien von Atomen zumindest nicht in einer damals offenbar gefolgerten Größenordnung von deren Vorgeschichte abhängen können.

in der Wirkungsichte wäre unter Umständen naheliegend<sup>105)</sup>, was auf die Einbeziehung der Ableitungen  $g_{klm}$  in den Energie-Impuls-Tensor  $T^{ik}(\dots, g_{lik})$  hinausliefe. Alle bisher zugrundegelegten Wirkungsichten implizieren eine letztlich nicht zwingend begründete<sup>106)</sup> Antisymmetrie von  $A_{ki}$ .

## 10.2 Abschließende Bemerkungen

Ohne auf diese und ähnlich interessante Fragen weiter einzugehen, bleibt schließlich festzuhalten, daß das hier skizzierte offene Konzept einer einheitlichen Skalar-Vektor-Tensor-Theorie auf vier einfachen Einsichten beruht, die letztlich allesamt aus der – über viele Jahre fortgesetzten – Analyse der dynamischen Paradoxa erwachsen sind:

a) Die Elektrodynamik läßt sich *konsistent formulieren*, wenn dem Aufbau der Materie aus elementaren Strukturen von Anfang an Rechnung getragen wird – ohne daß es dazu erforderlich wäre, diesen Aufbau umgekehrt aus der Theorie im Detail abzuleiten.

b) Die Quantenmechanik läßt sich *grundsätzlich verstehen* und mathematisch erfassen als die Physik mikroskopischer – in Stoßprozessen gegebenenfalls entstehender und vergehender – immer aber ausgedehnter Strukturen veränderlicher Gestalt, wobei unvermeidliche ‚Unschärfen‘ auftreten, solange diese Gebilde durch ausschließliche Verwendung ihrer charakteristischen Integrale als fiktive Punktteilchen beschrieben werden.

c) Die Relativitätstheorie läßt sich hinsichtlich Raum und Zeit sehr *einfach interpretieren* als Theorie der je nach Geschwindigkeit und Gravitationspotential beeinflussten natürlichen Uhren und Maßstäbe, wobei sich alle experimentell verifizierbaren bzw. falsifizierbaren Aussagen exakt mit den gleichen Konsequenzen ergeben wie bisher, ohne jedoch Begriffe wie beispielsweise ‚Raumkrümmung‘ überhaupt verwenden zu müssen.

d) Die Kosmologie läßt sich *vernünftig begründen* mit einer Unterscheidung zwischen ‚lokalem‘ evolutionären Kosmos und stationärem Hintergrunduniversum. Einzige Abweichungen der beiden mathematisch möglichen Auffassungen der Relativitätstheorie liegen bezeichnenderweise in Aussagen über einen ‚Urknall‘, der sich allerdings – wenn es ihn als Entstehung nicht nur unseres Kosmos, sondern des gesamten Universums einschließlich eines ‚Ursprungs der Raumzeit sowie der Naturgesetze selbst‘ gegeben hätte – als unbeweisbare Hypothese von vornherein und für immer jeder physikalischen Beschreibung entzöge.

Die erstgenannte dieser vier prinzipiellen Einsichten entspricht einer am Schluß seines Enzyklopädie-Artikels [16] erhobenen Forderung PAULIS, ohne daß dort allerdings das daraus entstehende, in den Abschnitten 8.1-2 behandelte, Problem des elektromagnetischen Feldstärketensors erwähnt worden wäre. Die zweite Einsicht impliziert einen neuen, leicht verständlichen Atombegriff, der über den von LEUKIPP und DEMOKRIT hinausgeht. Diesem Zugang ist SCHRÖDINGER meines Erachtens so nahe gekommen, wie es aus der Perspektive eines auf die klassische Physik *zurückblickenden* Pioniers der Quantenmechanik überhaupt möglich war. Die dritte Einsicht steht, soweit dies deren ersten Satz betrifft, wohl grundsätzlich in Einklang mit den Auffassungen von POINCARÉ und LORENTZ. Was deren zweiten Satz betrifft, so verweise ich insbesondere auf den vorletzten Absatz von Abschnitt *Discussion* sowie das *Acknowledgement*, beides aus [47], *Version v1*. Die vierte Einsicht bietet eine Perspektive zur prinzipiellen Aussöhnung des wegen seltsamer Koinzidenzen von einigen als ‚skandalös‘ empfundenen gegenwärtigen Modells mit einer – nicht nur numerisch erfolgreichen, sondern auch – physikalisch überzeugenden Kosmologie.

Von den im Literaturverzeichnis genannten Autoren haben sich die ‚alten Meister‘ MIE, v.LAUE, WEYL, PAULI, SOMMERFELD und POINCARÉ wie auch der ‚LANDAU-LIFSCHITZ‘ und der ‚WEINBERG‘ als besonders wertvoll erwiesen. So manches ist in der kritischen Auseinandersetzung mit den Vorstellungen der Kopenhagener Schule entstanden, aus deren Reihen hier HEISENBERG und ihr Begründer BOHR genannt seien, dessen Komplementaritätsprinzip m. E. über die Physik hinaus weiter an Bedeutung gewinnen kann<sup>107)</sup>.

<sup>105)</sup> Das könnte auch zu unsymmetrischen Beiträgen zum Energie-Impuls-Tensor  $T^{ik}$  führen, der gegebenenfalls die Unsymmetrie von  $t^{ik}$  kompensiert. Doch müßte dieser für makroskopische Abläufe weiterhin in den phänomenologischen übergehen.

<sup>106)</sup> HILBERTS axiomatische Begründung ist meines Erachtens keine Begründung, weil das eigens dazu formulierte Axiom kein Axiom sein müßte, wenn es sich eben begründen ließe [8].

<sup>107)</sup> Diese Bedeutung könnte sich bis in die Linguistik erstrecken.

Doch ist es insbesondere und vor allem das Werk ALBERT EINSTEINS, ohne dessen jahrzehntelanges Studium diese Arbeit weder begonnen – geschweige denn fertigzubringen wäre (in absehbarer Zeit soll ein Kapitel über die grundsätzlichen Möglichkeiten einer Eingliederung der Elementarteilchenphysik in das hier vorgestellte deduktive Konzept hinzukommen).

— — —

Es sei mir gestattet, noch ein paar kurze persönliche Bemerkungen anzufügen, die den Hintergrund der Arbeit betreffen. Aus Ideen von 1972 haben sich bis 1974 die dynamischen Paradoxa herauskristallisiert, die mich von da ab bis zu ihrer prinzipiellen Lösung 2003 nicht mehr losgelassen haben. Doch bereits seit 1995 lag die im Text angegebene Ableitung der relativistischen Schrödinger-Gleichung aus einem *reellen* Variationsprinzip GsD vor. Acht Jahre dauerten die Versuche herauszufinden, warum der Energie-Impuls-Tensor nicht aufgehen wollte. Ich denke, in dieser Zeit habe ich die richtigen Fehler gemacht, um danach sicher sein zu können, was *keine* Lösung ist. Schließlich sah ich ein, daß das Konzept teilchenbezogener Felder notwendig war, welches aber u. a. die im Text besprochenen neuen Schwierigkeiten mit sich brachte. Ende letzten Jahres konnten – wie ich denke – auch diese überwunden werden, teilweise allerdings nur grundsätzlich.

Für die Möglichkeit, mich mit solchen Fragen beinahe seit meiner Kindheit beschäftigen zu dürfen, habe ich vielen zu danken, die ich hier nicht namentlich einzeln aufzählen kann. Dank ihnen allen, und jedem besonders! Ausdrücklich hervorheben möchte ich meine Frau Marga – machst du wieder *Relativitätstheorie*? – meine Schwester Ruth und meinen Bruder Wilfried, ohne die es nicht gegangen wäre. Mein Vater hat mich noch vor Einstein gelehrt, daß irdische Autoritäten und Instanzen nicht unfehlbar sind. Meine Mutter hat mich auf vielfältige Weise kulturell beschenkt. Auch an die mit ihnen oder ihnen voraus gegangenen denke ich dankbar zurück.

In jungen Jahren auf solche Lehrer zu treffen wie allen voran die Herren Bildhauer, Quax, Kreis und Stein ist ein wahres Glück gewesen, auch die Mitschüler/innen seien hier erwähnt. Ein ebenso großes Glück war es später, selbst zu unterrichten – z. B. am Karlsgymnasium, wo ich mich zuhause fühlte – und dabei durch Lehren zu lernen. Nicht vergessen will ich alle Freunde, Partner und Mitarbeiter, die mir dann – sei es in München, Bruttig-Fankel, Erftstadt, Stuttgart, Metz, Berkeley oder anderswo – geholfen haben, die materielle Grundlage für eine vollständig *freie* Beschäftigung mit der Physik zu schaffen.

Mein Sohn Nikolas hat mich in den Jahren, als die Dinge schließlich zu reifen begannen, durch allabendliches wohlwollendes Nachfragen – was ist, wenn du dich *hier* verrechnet hast? – zur sorgfältigen Arbeit ermutigt. Meinem Sohn Matthias danke ich für die Verbindung zur Welt der jungen Physiker/innen-Generation und für manch denkwürdige Diskussion – das ist *deine* Perspektive! – sowie für hilfreiche Korrekturen und Anregungen. Die verbliebenen Fehler liegen alle in meiner Verantwortung. Auch weil ich keinen eigenen Text lesen kann, ohne nachträglich wieder einige Formulierungen zu ändern. Meine e-Mail-Adresse ist unten angegeben.

Überarbeitung vom 21. Dezember 2008

Die Originalversion dieser Arbeit vom 15. September 2006  
ist zu finden unter

<http://peter-ostermann.de>

## Anhang A: Eine erste Erweiterung zur Erfassung der DIRAC-Gleichung

Die SCHRÖDINGER-Gleichung ist als Eigenwertgleichung mit zugehörigem vollständigen Orthonormalsystem der KLEIN-GORDON-Gleichung in Bezug auf die Zusammensetzung von Lösungen zu *beliebigen* makroskopischen Funktionen überlegen. Das legt die Forderung einer relativistischen Eigenwertgleichung nahe. Denn nachdem bei der KLEIN-GORDON-Gleichung eine Orthogonalität der Lösungen zwar nicht durchgängig exakt, immerhin aber – wie eben aus den Eigenfunktionen der SCHRÖDINGER-Gleichung zu ersehen – in sehr guter Näherung gegeben ist, stellt sich sofort die Frage, ob nicht eine systematische Kombination von Lösungen bzw. eine Modifikation der Gleichungen, die *exakte* Orthogonalität gewährleisten kann<sup>108)</sup>. Eine konsistente Modifikation sollte dabei unmittelbar das Variationsprinzips selbst betreffen.

Doch auch aus der Notwendigkeit, elementare Polarisierungseffekte zu erfassen, ergibt sich der entsprechende Ansatz zum Ausbau der Theorie. Zwar führt deren Berücksichtigung in vielen Fällen nur zu numerisch kleinen Korrekturen, andererseits aber zeigen sich wesentliche Unterschiede, die sich bekanntlich im PAULI-Prinzip und einer entsprechenden Statistik – FERMI-DIRAC gegenüber BOSE-EINSTEIN – manifestieren.

Nach der Zusammenstellung der Wirkungsdichte (6,2) wurde am Ende des betreffenden Abschnitts in (6,9) zunächst einmal  $\mathbf{h}_K^{lm} := \mathbf{f}_K^{lm}$  gesetzt, bevor für diesen einfachsten Fall daraus die MAXWELL'schen Gleichungen, die KLEIN-GORDON-Gleichung sowie die EINSTEIN'schen Gleichungen abgeleitet wurden. Die damit akzeptierte Vernachlässigung möglicherweise auftretender Unterschiede zwischen  $\mathbf{h}_K^{lm}$  und  $\mathbf{f}_K^{lm}$  aber bedeutet, daß mikroskopische Polarisierungseffekte hierbei außer acht geblieben sind. Daraus folgt, daß die in den Abschnitten 6.2 – 6.4 entwickelten Gleichungen nicht ohne Erweiterung in der Lage sind, die elektromagnetische Wechselwirkung von Teilchen vollständig zu beschreiben, die ein elektrisches oder magnetisches Dipolmoment tragen. Mit der Entdeckung des Elektronenspins<sup>109)</sup> durch UHLENBECK und GOUDSMIT [64] aber hatte sich bereits vor SCHRÖDINGERS endgültiger Formulierung der nicht-relativistischen Wellenmechanik gezeigt, daß solche Teilchen tatsächlich existieren, wobei deren magnetisches Moment zusammen mit einem mechanischen Eigendrehimpuls  $n$  (Spin) in einem konstanten Verhältnis auftritt (beim Elektron  $-e/m_e c$ ). Diese Entdeckung legte von Anfang an eine Deutung im Sinne AMPÈRE'scher Elementarströme nahe, was allerdings – ganz in Einklang mit den hier entwickelten Vorstellungen – eine wie auch immer geartete Ausdehnung solcher Gebilde voraussetzt.

Nun ist es insbesondere möglich, aus *vier* Komponenten – jede einer geeignet erweiterten KLEIN-GORDON-Gleichung entsprechend – eine Wirkungsdichte so zusammenzusetzen, daß diese schließlich ein Äquivalent zur DIRAC-Gleichung [65] liefert. Und zwar läßt sich dies durch den Ansatz

$$\hat{\Phi}_K \equiv \frac{1}{4}(\mathbf{f}_K^{lm} + \mathbf{p}_K^{lm})f_{lm}^{\bar{K}} + \frac{1}{2}\beta_\mu^\nu \left( \tilde{\mathbf{j}}_{K\nu}^l \tilde{a}_l^{\bar{K}\mu} + m_K c^2 \mathbf{q}_{K\nu} q^{K\mu} - \frac{\hbar^2}{m_K} \mathbf{q}_{K\nu}^l q_l^{K\mu} \right) \quad (\text{A},1)$$

erreichen. Dabei steht  $\beta \equiv \gamma_0$  für die entsprechende DIRAC-Matrix (s. Abschn. „Bezeichnungen und Schreibweisen“), wobei in diesem Anhang A jeweils sofort über  $\mu, \nu$  von 1 bis 4 zu summieren ist. Außerdem wird in (A,1) analog zu der oben eingeführten Abkürzung (7,6) der Ausdruck  $\tilde{a}_i^K \equiv a_i^K + (c/e_K)s_i^K$  verwendet. Für jedes der vier  $\tilde{\mathbf{j}}_{N\nu}^m$  gilt (6,21) entsprechend. Im Vergleich mit (6,2) und im Unterschied zu (6,9) ist nun offensichtlich

$$\mathbf{h}_K^{lm} := \mathbf{f}_K^{lm} + \mathbf{p}_K^{lm}, \quad (\text{A},2)$$

<sup>108)</sup> Eine Orthogonalität wäre insbesondere von Anfang an gewährleistet, wenn es sich um das Eigenwertproblem eines hermiteschen Operators handelte, weil ja dessen Eigenfunktionen ohne weiteres orthogonal sind. Es soll hier nicht diskutiert werden, ob eine entsprechende Forderung bereits genügt, um von der KLEIN-GORDON-Gleichung zur DIRAC-Gleichung zu gelangen. Dort jedenfalls folgen die Orthogonalitätsrelationen u. a. aus der Kontinuitätsgleichung für die DIRAC-Stromdichte (s. SOMMERFELD [40]).

<sup>109)</sup> Das Phänomen des Teilchenspins hat einen interessanten Aspekt, auf den ich bereits an anderer Stelle [2] hingewiesen habe. Dieser ergibt sich im Zusammenhang mit dem EHRENFEST'schen Paradoxon aus einem Versuch BORNS, den Begriff des starren Körpers in die spezielle Relativitätstheorie zu übertragen. Dabei hat sich nämlich – lange vor der oben genannten Entdeckung – gezeigt, daß ein *relativ-starrer* Körper nicht in Rotation versetzt werden kann. Daraus schließe ich umgekehrt, daß es unmöglich wäre, einen einmal in Rotation befindlichen relativ-starren Körper abzubremesen, bei dem es sich außerdem nur um ein mikroskopisches Teilchen handeln könnte.

und es repräsentiert

$$\mathbf{p}_K^{lm} \equiv \frac{i}{2} \frac{\hbar e_K}{m_K c} \bar{\Psi}_K (\gamma^l \gamma^m - \gamma^m \gamma^l) \Psi_K \quad (\text{A,3})$$

den mikroskopischen Polarisationsfeldstärke-Tensor, wobei  $\Psi_K \equiv (\psi_0^K, \psi_1^K, \psi_2^K, \psi_3^K)$  für den DIRAC-Spinor steht, und  $\bar{\Psi}_K$  dessen adjungiertes Gegenstück bedeutet, so wie sie in den einschlägigen Lehrbüchern der relativistischen Quantenmechanik (s. z. B. [41]) verwendet werden.

Es kann kein Zweifel darüber bestehen, welcher Anteil von  $\mathbf{h}_K^{lm}$  die Polarisation repräsentiert, da das Integral über die entsprechende Ladungsdichte Null ergeben muß. Dies ist aber für den aus  $\mathbf{p}_K^{lm}$  resultierenden Anteil offensichtlich immer erfüllt. Denn mit der vorübergehenden Bezeichnung  $\vec{P}_e$  für die aus den Funktionen  $\psi_\nu^K$  algebraisch zusammengesetzte Polarisationsdichte eines beliebigen herausgegriffenen Teilchens ergibt sich

$$e_{\text{polarisation}} = \int \text{div } \vec{P}_e \, dV = \oint \vec{P}_e \, d\vec{S} = 0, \quad (\text{A,4})$$

weil  $\vec{P}_e$  bei Erfüllung der Fundamentalbedingungen in hinreichender Entfernung bis auf einen konstanten Faktor stärker als  $1/r^2$  gegen Null geht. Für jede Komponente des Spinors  $\Psi_K$  gilt nun eine (6,39) entsprechende Substitution. Dies bedeutet, daß sich – bei vorübergehender Unterdrückung des Teilchenindex K innerhalb frei fallender lokaler Inertialsysteme, auf die ich mich im restlichen Abschnitt durchgängig beziehen will – mit der Abkürzung

$$s_{\mu\nu} \equiv (s_\mu - s_\nu) / \hbar \quad (\text{A,5})$$

für den mikroskopischen Polarisationsfeldstärke-Tensor der Ausdruck

$$\begin{aligned} & p_{(\text{SRT})}^{lm} \\ & \equiv \\ & \frac{2\hbar e_K}{m_K c} \begin{bmatrix} 0 & -(q_2 q_1 \sin s_{21} + q_3 q_0 \sin s_{30}) & -(q_2 q_1 \cos s_{21} - q_3 q_0 \cos s_{30}) & -(q_2 q_0 \sin s_{20} - q_3 q_1 \sin s_{31}) \\ (q_2 q_1 \sin s_{21} + q_3 q_0 \sin s_{30}) & 0 & \frac{1}{2}(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) & -(q_1 q_0 \sin s_{10} - q_3 q_2 \sin s_{32}) \\ (q_2 q_1 \cos s_{21} - q_3 q_0 \cos s_{30}) & -\frac{1}{2}(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) & 0 & (q_1 q_0 \cos s_{10} - q_3 q_2 \cos s_{32}) \\ (q_2 q_0 \sin s_{20} - q_3 q_1 \sin s_{31}) & (q_1 q_0 \sin s_{10} - q_3 q_2 \sin s_{32}) & -(q_1 q_0 \cos s_{10} - q_3 q_2 \cos s_{32}) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A,6})$$

ergibt. Bei Verwendung dieses reellen Zusammenhangs in der Wirkungsdichte (A,1) ist das erweiterte Variationsprinzip geeignet, auch Spin-1/2-Teilchen zu erfassen.

Denn die Variation nach den  $q_{K\nu}$  und ihren Ableitungen ergibt dann für jedes Teilchen K das bekannte System von vier um die Polarisationssterme erweiterten KLEIN-GORDON-Gleichungen, das insgesamt der jeweiligen DIRAC-Gleichung entspricht (s. [40]). Aus der Variation nach den  $a_l^{\bar{K}\mu}$  und ihren Ableitungen folgen dann wieder quantisierte MAXWELL'sche Gleichungen, wobei als Stromdichte zunächst eine entsprechende Kombination der KLEIN-GORDON-Stromdichten  $\tilde{j}_{N\nu}^m$  auftritt. Es ist bemerkenswert, daß diese sich erst mit der aus  $p_K^{lm}$  resultierenden Polarisationsstromdichte  $-\frac{1}{2} \partial_l p_K^{lm}$  zur wohlbekannten positiv- oder negativ-definiten DIRAC-Stromdichte  $i_N^l$  zusammensetzt. Für die Polarisationsstromdichte selbst ist aufgrund der Antisymmetrie des entsprechenden Tensors eine eigene Kontinuitätsgleichung identisch erfüllt. Die zusätzlich notwendigen Kontinuitätsgleichungen für die vier beteiligten KLEIN-GORDON-Stromdichten ergeben sich aus der jeweiligen Variation nach den  $s_{K\nu}$ , die auch hier wieder nur in Form ihrer partiellen Ableitungen auftreten.

Weiter zeigt sich, daß der zugehörige Energie-Impuls-Tensor die fundamentalen Erhaltungssätze (4,1) in frei fallenden lokalen Inertialsystemen erfüllt. Dies läßt sich am einfachsten beim Übergang zur komplexen Spinor-Schreibweise verifizieren. Die teilchenbezogene Wirkungsdichte ist dann

$$\hat{\Phi}_N = \frac{1}{4} f_N^{kl} f_{kl}^{\bar{N}} + \frac{1}{2} \left[ \bar{\Psi}_k^N \gamma^k \Psi^N - \bar{\Psi}^N \gamma^k \Psi_k^N \right] + m_N c^2 \bar{\Psi}^N \Psi^N, \quad (\text{A},7)$$

wobei der Teilchenindex K, über den wie im Ausdruck (6,1) zu summieren ist, hier und im folgenden zur leichteren Unterscheidbarkeit durch N ersetzt ist. Die Überstreichung bei  $\bar{N}$  bedeutet dementsprechend wieder Nicht-N, wohingegen die Überstreichung bei  $\bar{\Psi}^N$  wie üblich für den bereits oben benutzten adjungierten Spinor steht. Die  $\gamma^k$  sind die kontravarianten DIRAC-Matrizen. Außerdem gelten die hier verwendeten Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Psi_k^N &\equiv i\hbar c \Psi_k^N - e_N a_k^{\bar{N}} \Psi^N \\ \bar{\Psi}_k^N &\equiv i\hbar c \bar{\Psi}_k^N + e_N a_k^{\bar{N}} \bar{\Psi}^N \end{aligned} \quad (\text{A},8)$$

mit  $\Psi_k^N \equiv \partial_k \Psi^N$  bzw.  $\bar{\Psi}_k^N \equiv \partial_k \bar{\Psi}^N$ . Demzufolge läßt sich (A,7) zum besseren Vergleich mit (6,2) und (A,1) auch schreiben als

$$\hat{\Phi}_N = \frac{1}{4} f_N^{kl} f_{kl}^{\bar{N}} + e_N a_k^{\bar{N}} (\bar{\Psi}^N \gamma^k \Psi^N) + m_N c^2 \bar{\Psi}^N \Psi^N + \frac{i}{2} \hbar c \left[ \bar{\Psi}_k^N \gamma^k \Psi^N - \bar{\Psi}^N \gamma^k \Psi_k^N \right]. \quad (\text{A},9)$$

Durch Variation nach den elektromagnetischen Potentialen folgt daraus zunächst analog zu Abschnitt 6.2 das eine Paar der MAXWELL'schen Gleichungen

$$\partial_k f_N^{kl} \equiv i_N^l = e_N \bar{\Psi}^N \gamma^l \Psi^N, \quad (\text{A},10)$$

während das andere Paar wie in (6,11) wiederum *per definitionem* identisch erfüllt ist. Die DIRAC-Stromdichte, die gemäß der wohlbekannten GORDON-Zerlegung die KLEIN-GORDON-Stromdichte  $\tilde{j}_N^l$  enthält, wird deshalb zur Unterscheidung wie bereits oben mit  $i_N^l$  bezeichnet.

Die Variation nach  $\Psi^N$  bzw.  $\bar{\Psi}^N$  liefert die DIRAC-Gleichung für das herausgegriffene Teilchen N in zwei äquivalenten Formen, nämlich

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \gamma^k (i\hbar c \Psi_k^N - e_N a_k^{\bar{N}} \Psi^N) - m_N c^2 \Psi^N = 0, \\ \beta) \quad & (i\hbar c \bar{\Psi}_k^N + e_N a_k^{\bar{N}} \bar{\Psi}^N) \gamma^k + m_N c^2 \bar{\Psi}^N = 0. \end{aligned} \quad (\text{A},11)$$

Der zugehörige Energie-Impuls-Tensor

$$T_k^l \equiv \sum_N T_k^{Nl}, \quad (\text{A},12)$$

der hier die Erhaltungssätze (4,1) erfüllt, ergibt sich nach dem in Abschnitt 6.5 angegebenen Verfahren durch direkte Berechnung zunächst in einer – bezüglich seiner kontravarianten Komponenten – unsymmetrischen Form, die sich mit Hilfe der DIRAC-Gleichung dann aber symmetrisieren läßt, zu

$$\begin{aligned} T_k^{Nl} &= \\ & \left[ -\frac{1}{2} (f_{km}^{\bar{N}} f_N^{lm} + f_N^{lm} f_{km}^{\bar{N}}) + \frac{1}{4} \delta_k^l f_{rs}^{\bar{N}} f_N^{rs} \right] - \frac{1}{2} (a_k^{\bar{N}} i_N^l + i_k^N a_{\bar{N}}^l) \\ & + \frac{i}{4} \hbar c \left[ (\bar{\Psi}_N \gamma_k \Psi_N^l - \bar{\Psi}_N^l \gamma_k \Psi_N) + (\bar{\Psi}_N \gamma^l \Psi_k^N - \bar{\Psi}_k^N \gamma^l \Psi_N) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A},13)$$

Dieser teilchenbezogene Summand des zur DIRAC-Gleichung gehörenden Energie-Impuls-Tensors wird hier vor allem auch deshalb angegeben, weil er – analog zur Ableitung der Beziehungen (7,15) bzw. (7,27) – ebenso wie

derjenige der KLEIN-GORDON-Gleichung (6,84) bzw. (6,87) tatsächlich die Identität des in (6,51) definierten Stationaritäts-Parameters  $\varepsilon_{N\lambda}$  (dort  $\varepsilon_{K\lambda}$ ) mit der Energie des gebundenen Elektrons im H-Atom ergibt.

Es ist davon auszugehen, daß sich der Energie-Impuls-Tensor (A,13) auch im Hinblick auf seine übrigen Komponenten innerhalb des Geltungsbereichs der speziellen Relativitätstheorie als konsistent erweist. Demzufolge steht zu erwarten, daß sich bei der Integration über die Impulsdichten beispielsweise die von SCHRÖDINGER festgestellte Zitterbewegung des freien DIRAC-Elektrons als *innere* Bewegung einer rotierenden Struktur herausstellt.

Ohne die Einschränkung auf frei fallende lokale Inertialsysteme aber tritt ein Problem auf, das eine Inkompatibilität der EINSTEIN'schen allgemeinen Relativitätstheorie mit der DIRAC-Gleichung in ihrer bisherigen Form bedeuten könnte. Bei der im Hauptteil dieser Arbeit entwickelten Theorie stimmen die beiden auf unterschiedliche Weise gewonnenen Energie-Impuls-Tensoren, wie in Abschnitt 6.5 gezeigt wurde, exakt überein. Doch scheint das Variationsprinzip bei der in diesem Anhang durchgeführten Erweiterung seine Konsistenz insofern zu verlieren, als zwar der kanonische Energie-Impuls-Tensor (A,12-13) entsprechend (4,1) sehr wohl

$$\partial_l T_k^l = 0, \quad (\text{A},14)$$

erfüllt, jedoch nicht mehr mit dem – analog zur Ableitung in Abschnitt 6.5 – nach dem üblichen Verfahren der allgemeinen Relativitätstheorie gewonnenen übereinstimmt. Es tritt hier nämlich bei den beiden letzten der drei Bestandteile von (A,13) ein zusätzlicher Faktor 2 auf, der – im Unterschied zu (A,13) selbst – mit einer Erfüllung der Erhaltungssätze (A,14) nicht vereinbar wäre.

Dies könnte ein Hinweis darauf sein, daß – wie bereits in Abschnitt 9.1 angedeutet – hier eine Verletzung des mikroskopischen Äquivalenzprinzips vorliegt und ein entsprechender konsistenter Energie-Impuls-Tensor auch die *Ableitungen* des Fundamentaltensors  $g_{klm}$  enthalten müßte. Es sieht also danach aus, als wäre entweder zur DIRAC-Gleichung selbst noch nicht das letzte Wort gesprochen, oder aber die Auffassung treffe nicht zu, daß sich der Energie-Impuls-Tensor der Materie  $T_{ik}$  in allen Fällen aus der Variation des entsprechenden Anteils der Wirkungsdichte  $\tilde{\Phi} \equiv \Phi - G/2\kappa$  nach  $g^{ik}$  *allein* ergibt. Es sei denn, die Schwierigkeiten liegen noch tiefer, indem sich beispielsweise EINSTEINS (ursprünglicher) Ansatz symmetrischer  $g_{ik}$  im Mikrokosmos als unvollständig erweist<sup>110)</sup>. Ein unsymmetrischer Fundamentaltensor aber sollte bei ebenfalls unsymmetrischen CHRISTOFFEL-Symbolen einen im allgemeinen nicht-verschwindenden Windungstensor  $\Gamma_{kl}^i - \Gamma_{lk}^i$  mit sich bringen. Damit verbunden wäre wieder eine Verletzung des Äquivalenzprinzips (s. Fußn. 99), welches doch durch alle bisherigen experimentellen Erfahrungen glänzend bestätigt ist. Daß dennoch ein nicht-verschwindender Windungstensor nicht undenkbar ist, liegt daran, daß sich eine solche Verletzung auf *mikroskopische* Bereiche beschränken könnte. Im (sub-)atomaren Bereich gibt es keine frei fallenden ‚Fahrstühle‘, innerhalb derer sich eine durchgängige Gültigkeit des Äquivalenzprinzips testen ließe. Doch sind diese Bemerkungen vor allem im Sinne einer Fragestellung zu verstehen.

Absicht dieses Anhangs war es nicht, die Einbindung der DIRAC-Gleichung samt zugehörigem Energie-Impuls-Tensor in das im Hauptteil der Arbeit entwickelte Konzept erschöpfend zu behandeln, wohl aber einen Weg dahin konkret zu zeigen.

---

<sup>110)</sup> s. a. EINSTEINS Überlegungen in [3]

## Anhang B: Das stationäre Modell im Vergleich mit den Supernova-Ia-Daten

Bei den in den letzten Jahren gewonnenen, außerordentlich wertvollen Daten der Supernovae (SNe) Ia handelt es sich möglicherweise um die aussagestärksten kosmologischen Meßwerte überhaupt. Diese Daten beschreiben – wie in Abschnitt 9.2.a ausgeführt – die Abhängigkeit der scheinbaren Helligkeiten  $m$  der als ‚Standardkerzen‘ benutzten SNe Ia von der jeweiligen Rotverschiebung  $z$  und wurden insbesondere in [66], [67], [68], [69], [70] und zuletzt in [50a], [50b] publiziert, wo sich auch weitere Referenzen finden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich auf den von RIESS *et al.* [50a], [50b] zusammengestellten Datensatz von 181 SNe Ia zurückgegriffen, dem neben vielen seiner eigenen Ergebnisse auch eine einheitliche Neubewertung der Originaldaten anderer Autoren zugrunde liegt. Darin sind insgesamt 140 terrestrisch entdeckte SNe Ia zusammen mit 41 am Hubble-Space-Telescope (HST) entdeckten enthalten. Gemäß den in [50a] zu findenden Abbildungen 4, 6 und 7 ist das dort so genannte ‚gold sample‘ von ursprünglich 157 SNe Ia um 2 HST-entdeckte des ‚silver sample‘ erweitert (2004). Dieser Datensatz ist hier ergänzt durch 22 später hinzugekommene HST-entdeckte SNe Ia aus [50b], wobei auch die dort angegebenen Korrekturen früherer Daten für das Folgende übernommen wurden (2007). Der in den genannten Abbildungen, s. [50a], offenbar zugrundegelegte Wert der HUBBLE-Konstanten ist – wo nichts anderes gesagt – durchgängig in allen diesbezüglichen Abbildungen als  $H_0 \equiv H = 65 \text{ km/s/Mpc}$  verwendet, ebenso die dort für das *Cosmological Concordance Model* (CCM) ermittelten ‚Best-Fit‘-Werte  $\Omega_M \approx 29\%$ ,  $\Omega_\Lambda \approx 71\%$  für die Anteile von Materie bzw. ‚dunkler Energie‘ an der kritischen Dichte  $\rho_c$ .

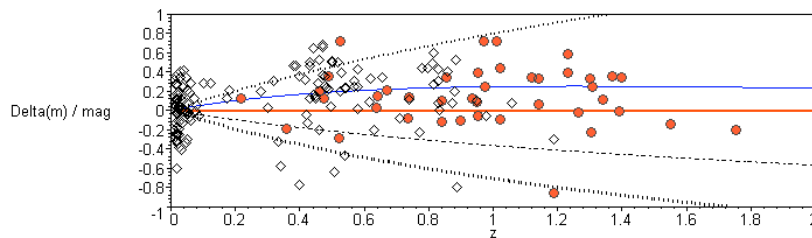


Abb. 5: Die bereits in Abbildung 4 des Abschnitts 9.2 erkennbaren Unterschiede treten hier als ‚residuals‘ im direkten Vergleich mit dem stationären Modell stärker hervor, wobei die graphische Zuordnung durchgängig beibehalten wird.

Die zu den verschiedenen Modelle gehörigen Kurven lassen sich aus deren jeweiligen Skalenfaktoren leicht ableiten.

Von oben nach unten sind dies  $a_{SST} = e^{Ht'}$ ,  $a_{CCM}$  s. Formel (B,1),  $a_{SU} = 1 + Ht'$ ,  $a_{EdS} = (1 + \frac{3}{2}Ht')^{2/3}$ ,  $a_{RDM} = (1 + 2Ht')^{1/2}$ .

Mit den Indizes ‚M‘ für Materie und ‚ $\Lambda$ ‘ für die kosmologische Konstante sind die entsprechenden Belegungen

$$(\rho_M, p_M, \rho_\Lambda)/\rho_c = (0, 0, 1), (0.29, 0, 0.71), (1, -\frac{1}{3}, 0), (1, 0, 0), (1, \frac{1}{3}, 0).$$

Unabhängig von ihrer nachträglichen Begründung repräsentiert die blaue CCM-Linie ein sehr gutes ‚Best-Fit‘-Modell.

Ein sehr starkes Argument für das hier vorgeschlagene Modell eines stationären Hintergrunduniversums liegt – bei gleichzeitig einzigartiger Einfachheit und Klarheit – in der bereits auf Anhieb vergleichsweise guten Übereinstimmung mit den fundamentalen SNe-Ia-Beobachtungstatsachen. Dies hat die Abbildung 4 gezeigt, wo verschiedene theoretisch abgeleitete Magnituden-Rotverschiebungs-Beziehungen unmittelbar mit den tatsächlichen Beobachtungsdaten konfrontiert wurden<sup>111)</sup>.

Es ist jedenfalls auf den ersten Blick erkennbar, daß angesichts der SNe-Ia-Daten nur zwei der fünf skizzierten Modelle überhaupt in Frage kommen. Das bedeutet umgekehrt, daß weder die bis vor wenigen Jahren erwartete EINSTEIN-DE-SITTER-Kosmologie (EdS) noch die früher von vielen bevorzugte Steady-state Theory (SST) mit den Fakten vereinbar sind, sondern daß eine angemessene Lösung offensichtlich *zwischen* diesen beiden liegen muß.

Dies wird beim Übergang vom Entfernungsmodul  $m-M$  in Abbildung 4 zu den Differenzen (‚residuals‘)  $\Delta(m)$  in Abbildung 5 besonders deutlich. Hier sind die Differenzen der Meßdaten bzw. des CCM gegenüber

<sup>111)</sup> Die obigen Abbildungen 4, 5 entsprechen grundsätzlich ‚FIG. 4‘, und ‚FIG. 6‘ bei RIESS *et al.* [50a]. Die dort bzw. bei RIESS *et al.* [50b] entnommenen Daten stimmen mit den hier verwendeten exakt überein. Daß sich das in Abschnitt 9.2 besprochene stationäre Universum als ein Referenz-Modell anbietet, geht – nach ersten Ansätzen einer derartigen Verwendung z. B. als „ $q=0$ “-Trennlinie in Fig. 4/[71] – auch aus der in ‚FIG. 6‘/[50a] benutzten „Coasting,  $q(z)=0$ “-Vergleichsbasis hervor (s. Fußn. 94).

der roten Basislinie dargestellt, die bei gleicher Belegung der Konstanten  $H_0$  und  $M$  der Beziehung (9,12) des stationären Modells entspricht.

Es kann kein Zweifel daran bestehen, daß das *Concordance/Consensus Model* (CCM) fundamentale Beobachtungstatsachen der Kosmologie überaus erfolgreich zusammenfaßt. Das Konzept einer heißen, inflationären ‘Big-Bang’-Singularität hat sich insgesamt als sehr fruchtbar erwiesen (s. z. B. [72]), indem es – bei gleichzeitiger schrittweiser Erweiterung bzw. Anpassung – zu den überwältigenden kosmologischen Entdeckungen der letzten Jahre beigetragen hat<sup>112)</sup>. Durch Hinzunahme diverser Parameter werden sich gegebenenfalls auch zukünftige Entdeckungen in dieses Bild einordnen lassen. Doch trotz aller numerischen Erfolge können einige *wesentliche* Aspekte des CCM nicht überzeugen. Die willkürlich anmutenden Koinzidenzen des Modells wären am ehesten für einen evolutionären Kosmos vorstellbar, der in ein stationäres Universum – wie eben das in Abschnitt 9.2 skizzierte – eingebettet ist. Jedes ernsthaft in Frage kommende Modell des Universums hat es verdient, allen möglichen Einwänden ausgesetzt zu werden. In diesem Anhang B nun interessiert das CCM vor allem als nützliches ‘Best-Fit’-Modell, das die bisherigen SNe-Ia-Daten in einem geschlossenen Ausdruck mathematisch zusammenfaßt.

Werden anstatt der ursprünglichen die auf ihrer rechten Seite um das kosmologische Glied  $\Lambda g_{ik}$  erweiterten EINSTEIN’schen Gleichungen zugrundegelegt, so ergibt sich (s. a. [47]) bei fehlendem materiellen Druck  $p_M = 0$  und legitimer Vernachlässigung der Strahlungsbeiträge – mit der Abkürzung  $\Omega_\Lambda \equiv \rho_\Lambda / \rho_c$  sowie der Euklidizitäts-Bedingung  $\rho_M + \rho_\Lambda = \rho_c$  – der Skalenfaktor einer entsprechenden FLRW-Form zu

$$a_{\text{CCM}}(t') = \left\{ \left( \frac{1}{\Omega_\Lambda} - 1 \right) \sinh^2 \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \sqrt{\Omega_\Lambda}}{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}} \right) - \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H t' \right] \right\}^{1/3}. \quad (\text{B},1)$$

Aus diesem Skalenfaktor läßt sich im Sinne der bereits oben erwähnten ‘Best-Fit’-Belegung eine – dort an die Stelle von (9,12) tretende – Beziehung zwischen der scheinbaren Helligkeit von SNe Ia und ihrer jeweiligen Rotverschiebung ableiten, die den Beobachtungsdaten tatsächlich sehr nahe kommt. *Ohne* Berücksichtigung möglicher ‘lokaler’ Evolution, großräumiger Inhomogenitäten oder intergalaktischer, nicht-verfärbender Absorption (z. B. durch ‘grey dust’ s. [50a]) repräsentiert das CCM – wie aus den Abbildungen 4, 7 und 10.b ersichtlich – die entsprechenden Meßwerte optimal. Der darin stets mit dem von RIESS *et al.* angegebenen ‘Best-Fit’-Wert  $\Omega_\Lambda \approx 71\%$  gezeichnete CCM-Entfernungsmodul ergibt sich aus (B,1) zu

$$m_{\text{CCM}} - M = 5 \log \left[ (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1-\Omega_\Lambda)(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}} \right] + 25 + 5 \log \left( \frac{c/H}{\text{Mpc}} \right). \quad (\text{B},2)$$

Das erstaunliche ist nun – dies wurde in [47] gezeigt – daß die dafür verantwortlichen CCM-Parameter mit ihren von BENNETT *et al.* [73] publizierten Werten  $\Omega_\Lambda \approx 0.73$  und  $\Omega_M \approx 0.27$  beinahe exakt durch die Bedingung  $H_0 T_0 = 1$  determiniert sind. Diese Forderung, die beim stationären Modell für alle Zeiten identisch erfüllt ist, kann beim CCM aber nur *vorübergehend* erfüllt sein. Und zwar von all der Zeit, die auf den dort zugrundegelegten ‘Urknall’ folgen soll, gerade nach  $12 - 15 \cdot 10^9$  a – das heißt ausgerechnet also: ‘heute’! – Ergänzend sei erwähnt, daß der CCM-Kosmos auf etwa  $r^* \leq 3.4 R_H$  begrenzt wäre, wie sich aus ‘Table 3 - ‘Best’ Cosmological Parameters’ in [73] schließen läßt. Im Hinblick auf die in Abschnitt 9.2.b aufgeworfene Frage der Größe lokaler ‘Big-Bang’-Bereiche eines stationären Hintergrunduniversums scheint dies ein interessanter Aspekt.

Wie nun gezeigt werden soll, bieten sich zur Erklärung der – relativ geringen – Abweichungen zwischen den CCM- und der SU-Linien (s. Abbn. 4, 5) vor allem zwei Möglichkeiten an. Wie in Abschnitt 9.2 angedeutet, handelt es sich dabei einerseits um die Berücksichtigung eines eventuell gegebenen lokalen HUBBLE-Kontrasts  $\delta H/H$  und andererseits um eine bereits in [50a] diskutierte nicht-verfärbende Absorption durch intergalaktischen ‘grauen’ Staub. Diese Alternative wurde – allerdings im Hinblick auf die wesentlich größeren Abweichungen zwischen dem CCM und der EdS-Kosmologie samt gängigen Varianten – verworfen.

<sup>112)</sup> Die Qualität der Beobachtungsergebnisse ist unabhängig von der Qualität ihrer bisherigen theoretischen Erklärung.

Bei Betrachtung von Abbildung 4 (s. Abschn. 9.2) fällt sofort ins Auge, daß z. B. eine kleine vertikale Verschiebung um  $\Delta m \approx 0.2^m$  genügen würde, alle dort erkennbaren Unterschiede zwischen der roten (SU) und der blauen (CCM) Linie aufzuheben. Die physikalische Bedeutung einer solchen Verschiebung ist sehr einfach.

Zunächst ist mit Rücksicht auf (9,12) zu betonen (s. a. [50a]), daß die absoluten Werte der Entfernungsmoduls  $m-M$  nicht eindeutig durch die Meßwerte der scheinbaren Helligkeiten determiniert sind, solange nicht die HUBBLE-Konstante  $H$  bzw. die absolute Größe  $M$  einer typischen SN Ia (Standardkerze) endgültig feststehen. Läßt man in der Beziehung (9,12) bis auf die Größen  $m$  und  $H$  alle übrigen Werte ungeändert, dann bedeutet eine *Zunahme* des Entfernungsmoduls um  $\Delta m \approx 0.2^m$  nichts anderes als eine *Reduktion* des von RIESS *et al.* verwendeten Wertes der HUBBLE-Konstanten um ca. 9% und umgekehrt. Dies entspricht einer Veränderung um etwa  $-6$  km/s/Mpc, was z. B. einen Übergang von 65 km/s/Mpc auf 59 km/s/Mpc bedeuten würde.

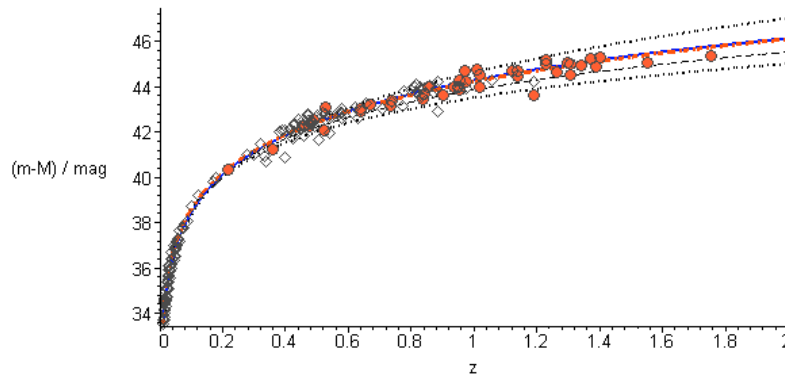


Abb. 6: Alle nicht blau gezeichneten Kurven der Abbildung 4 sind hier um  $\Delta m \approx 0.2^m$  vertikal zur CCM-Linie verschoben.

Dadurch wird die blaue CCM-Linie von der rot-gestrichelten verschobenen SU-Linie nahezu überdeckt.

Solch eine vertikale Verschiebung um  $\Delta m \approx 0.2^m$  entspricht nach (9,12) einer Reduktion der HUBBLE-Konstanten um 9%.

Bei geeigneter Anpassung von  $M$  ließen sich umgekehrt ebenso gut alle in Abbildung 4 eingetragenen Supernova-Ia-Symbole mitsamt der blauen CCM-Linie vertikal um  $\Delta m \approx -0.2^m$  nach unten verschieben, um annähernde Überdeckung mit der roten SU-Linie im Bereich  $z > 0.2$  zu erhalten. Dies würde einen Zuwachs des Wertes der HUBBLE-Konstanten um ca. 6 km/s/Mpc bedeuten, was z. B. einem Übergang von 65 km/s/Mpc auf 71 km/s/Mpc entsprechen könnte. Es ist bemerkenswert, daß es sich bei allen drei hier genannten Größen näherungsweise um wohlbekannte rivalisierende Werte der HUBBLE-Konstanten handelt.

Ob nun die Meßdaten in Richtung der roten SU-Linie verschoben werden oder umgekehrt, entscheidend ist, daß sich im Hinblick auf das Modell des stationären Universums für hinreichend große Entfernungen – d.h. im bisherigen ‚High-Redshift‘-Bereich  $0.1 < z < 1.7$  – eine weitgehende numerische Übereinstimmung allein dadurch erzielen läßt, daß die Konstanten  $M$  bzw.  $H$  im Rahmen der aus unterschiedlichen Messungen resultierenden Toleranzen geeignet angesetzt werden.

Dementsprechend scheint die verschobene, und deshalb rot *gestrichelte* SU-Linie in Abbildung 6 mit der blauen CCM-Linie zusammenzufallen. Doch wie in Abbildung 7 zu sehen ist, machen sich die ursprünglich im oberen  $z$ -Bereich aufgetretenen Unterschiede um  $\Delta m \approx 0.2^m$  nun im Bereich  $0.01 < z < 0.1$  bemerkbar. Was kann das bedeuten?

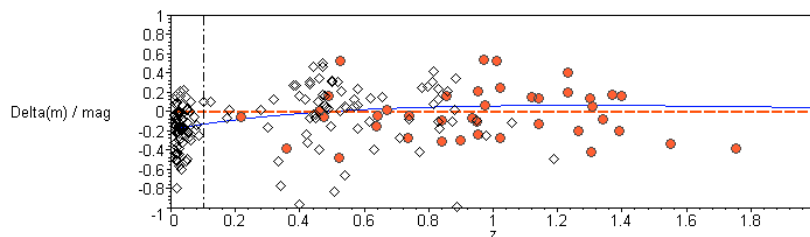


Abb. 7: Der SNe-Ia-Datensatz relativ zur theoretischen Vorhersage des stationären Modells ohne Berücksichtigung von Absorption oder möglichen Korrekturen infolge ‚lokaler‘ Inhomogenitäten.

Die verschobene, rot gestrichelte SU-Linie repräsentiert im ‚High-Redshift‘-Bereich  $0.1 < z < 1.7$  die SNe-Ia-Daten nun vergleichbar gut wie die blaue CCM-Linie (die allerdings auch den ‚Low-Redshift‘-Bereich  $0.01 < z \leq 0.1$  erfaßt).

Die offensichtlich gute Übereinstimmung scheint hier zwar auf den Bereich relativ großer Rotverschiebungen  $z > 0.1$  eingeschränkt zu sein, doch steht dies durchaus im Einklang mit der erklärten Absicht, daß das stationäre Linienelement (9,3-4) – und demzufolge auch (9,12) – das Universum auf hinreichend großen Skalen beschreiben soll, wo die Annahme homogen und isotrop verteilter Materie tatsächlich berechtigt ist. Unter diesem Aspekt deutet nun einiges darauf hin, daß die Abweichungen von der stationären Lösung im Bereich  $0 < z \leq 0.1$  möglicherweise als Hinweis auf lokale Inhomogenitäten zu verstehen sein könnten.

Die bloße Existenz solcher Gebilde wie *Great Wall* oder *Great Attractor* – deren Ausdehnungen sich offenbar über Entfernungen von größenordnungsmäßig 100 Mpc erstrecken – beweist die Existenz großräumiger Inhomogenitäten in unserer ‚unmittelbaren‘ kosmischen Nachbarschaft, nämlich im Rotverschiebungsintervall  $0 \leq z < 0.02$ . Es wäre deshalb eher überraschend, wenn sich in den SNe-Ia-Daten überhaupt keine systematischen Einflüsse entsprechender Inhomogenitäten finden ließen. Wenn man zusätzlich bedenkt, daß die eben genannte *Große Wand* sogar nur einen Teil der Abgrenzung eines noch größeren Gebietes darzustellen scheint, das vergleichsweise dünn mit Galaxien besiedelt ist, so ergibt sich daraus, daß das Universum wohl erst über Skalen der Größenordnung von mehreren hundert Mpc – d.h. etwa für  $z > 0.1$  – mit genügender Berechtigung als homogen betrachtet werden kann<sup>113)</sup>.

Unabhängig von physikalischen Voraussetzungen und Implikationen wird in Abbildung 8 als Ergebnis einer numerischen Betrachtung gezeigt, daß eine fiktive Rotverschiebungs-Korrektur um ein mittleres konstantes  $\delta z = 0.0018$  innerhalb eines relativ kleinen Bereichs von  $z < 0.01$  genügen würde, um zusammen mit einer vertikalen Verschiebung  $\Delta m \approx 0.19^m$  die SNe-Ia-Daten über den gesamten bisher erfaßten Rotverschiebungsbereich befriedigend zu beschreiben.

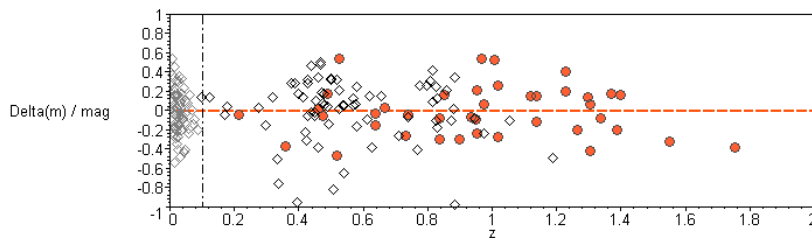


Abb. 8: Die hier grau anstatt schwarz eingetragenen SNe-Ia-Daten nach einer versuchsweisen Korrektur um  $\delta z \approx -0.0018$ , deren zunächst unbekannte Ursache dabei vollständig innerhalb  $z < 0.01$  liegen sollte.

Die hier gezeigte Möglichkeit, eine numerische Übereinstimmung des stationären Modells mit den SNe-Ia-Daten zu erreichen, entspricht im Rückblick auf Abbildung 4 der folgenden Vorgehensweise: Zuerst wird die rote SU-Linie *vertikal* auf die blaue CCM-Linie nach oben verschoben (Abb. 6). Die dabei entstehenden – in der entsprechenden Darstellung nicht einmal sichtbaren – Differenzen werden dadurch kompensiert, daß die Supernova-Symbole anschließend um den kleinen Betrag  $\delta z \approx -0.0018$  *horizontal* nach links verschoben werden, wobei sie im Mittel für kleine  $z$  auf der neuen SU-Linie landen und für große  $z$  auf dieser verbleiben.

Der Wert der vertikalen Verschiebung ist dabei zunächst ohne Belang, weil die Absolutwerte von  $M$  nicht präzise bekannt sind. Anders verhält es sich mit dem Wert der in Abbildung 8 benutzten horizontalen Verschiebung  $\delta z \approx -0.0018$ , die aufgrund der Voraussetzung, daß ihre Ursache innerhalb eines Bereichs von  $z_{\text{Rand}} < 0.01$  liegen soll, einen grob geschätzten *HUBBLE-Kontrast* von  $\delta H/H \equiv (H_{\text{lokal}} - H_{\text{universal}})/H_{\text{universal}} \approx -\delta z/z_{\text{Rand}} \approx 18\%$  implizieren würde.

Das ist insofern verblüffend, als dieser Wert z. B. der Situation entspräche, daß die mittlere lokale HUBBLE-Konstante unserer kosmischen Nachbarschaft 72 km/s/Mpc betrüge, die universale dagegen nur 59 km/s/Mpc, was gerade der Bandbreite der – jeweils mit guten Gründen – behaupteten Werte der HUBBLE-Konstanten entspricht (s. z. B. [74], [75]). Es ist kaum anzunehmen, daß es sich dabei um einen bloßen Zufall handelt.

Die der Abbildung 8 zugrundegelegte Annahme eines entsprechenden HUBBLE-Kontrasts ist in Abbildung 9 noch einmal auf andere Weise – ebenfalls aber in grober Vereinfachung – dargestellt. Die Steigung der blau

<sup>113)</sup> Auf derartig großen Skalen ist möglicherweise das eingebettete Linienelement (s. [20]) anzuwenden. Hier soll die Feststellung genügen, daß es sinnvoll scheint, sich bei Aussagen über ein großräumig homogenes und isotropes stationäres Universum vor allem auf Beobachtungstatsachen im Bereich  $z > 0.1$  zu stützen.

schräffierten Linie repräsentiert die lokale, die der rot gestrichelten die universal gemittelte HUBBLE-Konstante. Die beobachteten Supernovae Ia wären dabei auf der blau durchgezogenen Linie angesiedelt.

Ob sich die Dinge wirklich im Sinne der hier aufgezeigten Deutungsmöglichkeit verhalten, kann nur die weitere Beobachtung lehren. Doch ist es auf jeden Fall interessant zu sehen, daß bereits sehr kleine Eigentümlichkeiten unserer kosmischen Nachbarschaft genügen würden, um die SNe-Ia-Daten in weitgehende Übereinstimmung mit dem stationären Modell zu bringen (inzwischen gibt es erste entsprechende Hinweise; so soll nach [76] die HUBBLE-„Konstante“ innerhalb  $z \approx 0.02$  um ca. 7 % größer sein als außerhalb dieses Bereichs).

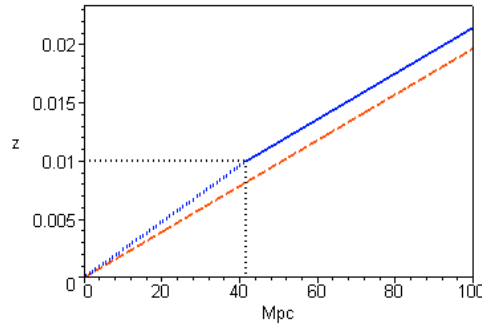


Abb. 9: Zur groben Veranschaulichung eines denkbaren HUBBLE-Kontrasts von  $\delta H/H \approx 18\%$ , der gerade den beiden Werten  $H_{\text{lokal}} = 72 \text{ km/s/Mpc}$  und  $H_{\text{universal}} = 59 \text{ km/s/Mpc}$  entsprechen würde.

Umgekehrt folgt aus der obigen Betrachtung, daß der Absolutwert eines derartigen lokalen HUBBLE-Kontrasts nicht größer sein kann als ca. 18%, wenn das stationäre Modell richtig ist.

Ebenso folgt aus Abbildung 10.a, daß der Absorptionskoeffizient eines intergalaktisch verteilten „grauen“ Staubs nicht größer sein könnte als etwa  $\lambda_{\text{Absorption}} = 1/(4R_H)$ , weil bereits bei einer solchen Absorption die SNe-Ia-Daten offensichtlich auch ohne die zuvor besprochenen räumlichen Inhomogenitäten in ungefähre Übereinstimmung mit dem stationären Modell kämen. Die grüne Basislinie repräsentiert hier die Vorhersage des stationären Modells nach Korrektur im Sinne einer wie üblich exponentiell abfallenden Absorption.

Die Abbildung 10.b zeigt – zum anschaulichen Vergleich mit den Abbildungen 8 und 10.a – die relativen Abweichungen der Meßdaten gegenüber dem in der früheren Abbildung 4 ebenfalls blau gezeichneten CCM-Entfernungsmodell.

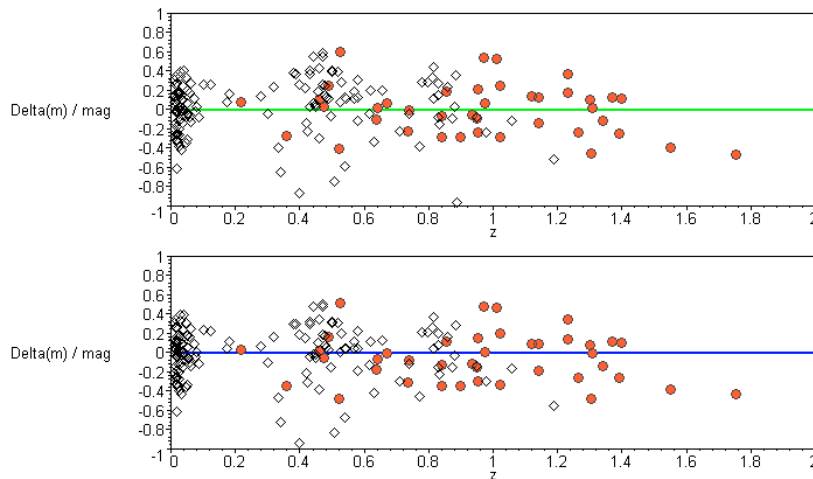


Abb. 10: a) Die obere Darstellung bezieht sich auf die Möglichkeit einer intergalaktischen Absorption durch nichtverfärbenden „grauen“ Staub mit einem Schwächungskoeffizienten  $\lambda_{\text{Absorption}} = 1/(4R_H)$ , ohne jeden HUBBLE-Kontrast.

b) Die untere Darstellung zeigt die Differenzen („residuals“) der Meßwerte gegen den CCM-Entfernungsmodell. Alleine schon die offensichtlich asymmetrische Streuung der Meßwerte gibt meines Erachtens einen Hinweis darauf, daß zur richtigen Deutung die Möglichkeiten großräumiger Inhomogenitäten und Anisotropien in Betracht zu ziehen sind.

Der Rückschluß aus den SNe-Ia-Daten auf ein „beschleunigt expandierendes Universum“, d.h. auf eine kosmologische (Teil-)Konstante  $\Lambda$ , kann jedenfalls nicht als gesichert betrachtet werden, solange er, wie hier gezeigt, abhängig ist von der wenig wahrscheinlichen Voraussetzung  $-0.0018 \ll \delta z \leq 0$  innerhalb unserer „lokalen“

Umgebung  $z < 0.01$ . Dementsprechend läßt sich derzeit also entweder  $H_0 := H_{\text{lokal}}$  voraussetzen und dann aus den SNe-Ia-Daten auf abwechselnde Beschleunigungs- und Bremsphasen des Kosmos schließen. Oder aber aus dem ‘High-Redshift’-Bereich der SNe-Ia-Daten ist der Wert  $H_{\text{universal}}$  zu entnehmen und dann in grober Abschätzung z.B. auf die Möglichkeit eines  $\delta z \approx -0.0018$ , d.h. auf  $\delta H/H \approx 18\%$  innerhalb unserer ‘lokalen’ Umgebung  $z < 0.01$  zu schließen (die Meßwerte in [76] zeigen eine entsprechende Tendenz). Unter Einbeziehung der Möglichkeit einer intergalaktischen Absorption wäre auch eine Kombination beider Effekte denkbar, die meines Erachtens klein genug sein könnten, um der bisherigen Beobachtung bzw. Identifikation entgangen zu sein.

Ganz analog verhält es sich prinzipiell mit der Interpretation überhaupt *aller* abweichenden Beobachtungstatsachen vor dem Hintergrund eines stationären Universums.

Wer aber will, mag das stationäre Linienelement natürlich auch im Sinne der gegenwärtigen Urknall-Kosmologie deuten. Der Gewinn wird selbst dann noch in der Erkenntnis liegen, daß dieses einfachste aller denkbaren Linienelemente den Beobachtungstatsachen jedenfalls verblüffend nahe kommt.

Wie aus den hier herangezogenen Supernova-Ia-Daten längst geschlossen wurde, ist die bis vor wenigen Jahren von vielen favorisierte EINSTEIN-DE SITTER-Kosmologie ebenso widerlegt wie z.B. die ehemals so bezeichnete Steady-state Theory. Abgesehen von den außerordentlich wertvollen Meßdaten selbst, ist dies meines Erachtens der bisher einzig *sichere* Erkenntnisgewinn aus den in jüngster Zeit beinahe unglaublichen Fortschritten der instrumentellen Kosmologie.

Tatsächlich lassen sich die unerwarteten kosmologischen Beobachtungstatsachen der vergangenen Jahre näherungsweise als ein – aus Sicht des stationären Modells selbstverständliches – doppeltes Null-Resultat zusammenfassen:  $k \approx 0$ ,  $q \approx 0$ . Dabei steht  $k$  für den ‘Krümmungs’-Parameter des dreidimensionalen Raums und  $q$  für den ‘Decelerations’-Parameter (s. Fußn. 94), der ursprünglich die Abbremsung – heute umgekehrt die Beschleunigung – der kosmischen Expansion beschreiben soll.

Mit Blick auf die SNe-Ia-Daten bleibt offenbar nur das Cosmological Concordance Model<sup>114)</sup> oder eben das stationäre Universum – oder am Ende doch beides? Sollte das CCM eines Tages eine endgültige Bestätigung erfahren – was meines Erachtens den mittels verschiedener Verfahren verifizierten Nachweis  $\Theta(T') \sim 1/a(T')$  zur Voraussetzung hätte<sup>115)</sup> – so läge eine prinzipielle Lösung aller Rätsel der gegenwärtigen Kosmologie in der Unterscheidung von evolutionärem Kosmos und stationärem Universum. Gerade das stationäre Linienelement könnte in diesem Fall die Möglichkeit bieten, am CCM als der Beschreibung unseres *Kosmos* festzuhalten, ohne aber dem *Universum* all die befremdlichen Eigenschaften und Zufälligkeiten zuschreiben zu müssen, die sich unter dem Stichwort ‘Koinzidenzprobleme’<sup>116)</sup> zusammenfassen lassen. Die Frage ist meines Erachtens allerdings noch nicht entschieden, ob dies am Ende überhaupt notwendig sein wird.

Nur eine solche Unterscheidung von Kosmos und Universum jedenfalls gewährleistet, daß Einfachheit und Klarheit einer größtmöglichen Anpassungsfähigkeit an die ‘lokale’ kosmische Umgebung nicht im Wege stehen. In diesem Sinne läuft die Problematik beobachteter Abweichungen gegenüber den hier erwarteten universalen Durchschnittswerten grundsätzlich immer auf die Frage hinaus, ob deren Ursachen nicht möglicherweise in lokalisierbaren – räumlichen oder auch zeitlichen – Inhomogenitäten zu suchen sind.

Erklärte Absicht dieses Anhangs B war es nicht, gesicherte Erkenntnisse über Eigentümlichkeiten unserer ‘lokalen’ kosmischen Umgebung zu gewinnen. Die diesbezüglichen Beispiele sind zunächst nur als Denkmotive anzusehen, und die dabei verwendeten Zahlen brauchen keineswegs zuzutreffen. Es sollte hier lediglich die grundsätzliche Vorgehensweise aufgezeigt werden, die es – auf Basis des stationären Modells – ermöglicht, aus bisherigen und zukünftigen Beobachtungsdaten ‘lokale’ Rückschlüsse zu ziehen.

<sup>114)</sup> Der Name dieses Modells, das auch als ‘Consensus Model’ bezeichnet wird, weist darauf hin, daß hier versucht wird, das Linienelement des Universums gewissermaßen per Abstimmung zu finden. Diese eher diplomatische Vorgehensweise wird meines Erachtens allerdings fragwürdig, wenn als Ergebnis dem *Universum* als Ganzem so seltsame Eigenschaften wie unregelmäßig abwechselnde Beschleunigungs- und Bremsphasen zugeschrieben werden sollen.

<sup>115)</sup> Die Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung sollte dementsprechend  $\Theta = (1+z) \cdot 2.7$  K betragen, woraus sich die Möglichkeit einer Bestätigung, aber auch die einer Widerlegung des zugrundeliegenden Modells ergibt. Die bisherigen Messungen am Licht sehr weit entfernter Objekte sind meines Erachtens (noch?) nicht wirklich überzeugend.

<sup>116)</sup> Das seltsamste von allen betrifft das ‘Alter des Universums’. Ein ‘Zufall’  $T_0 \approx 1/H_0$  läßt sich nur aus einem ‘anthrop(olog)ischen Prinzip’ begründen. Doch scheint es im Sinne des Abschnitts 3.4 eher vernünftig, dieses Prinzip auf unsere kosmische Umgebung bzw. auf unseren ‘lokalen’ Kosmos anzuwenden, nicht aber auf das gesamte Universum.

## Literatur

- [1] P. OSTERMANN: *Zur relativistischen Behandlung einfacher Bewegungsabläufe in abgeschlossenen Systemen*; Phys. u. Didakt. (1985)/1, 23-37; ein pdf-Scan dieser Arbeit läßt sich von der Website des Verf. herunterladen
- [2] P. OSTERMANN: *Die Einweg-Lichtgeschwindigkeit auf der rotierenden Erde und die Definition des Meters*; e-Print <<http://arXiv.org/abs/gr-qc/0208056>> (2002) 1-22
- [3] A. EINSTEIN: „Autobiographisches“ und „Bemerkungen zu den in diesem Bande vereinigten Arbeiten“, in Paul A. Schilpp (Hrsg.), *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*; 3. Aufl., Stuttgart 1955
- [4] J. J. LARMOR: *Aether and Matter*; Cambridge 1900
- [5] K. SCHWARZSCHILD, Gött. Nachr., math-naturw. Kl. (1903) 125
- [6] G. MIE: *Grundlagen einer Theorie der Materie*; Ann. d. Phys. **37** (1912) 511-534; **39** (1912) 1-40; **40** (1912) 1-66
- [7] M. BORN: *Der Impuls-Energiesatz in der Elektrodynamik von Gustav Mie*; Kgl. Ges. d. Wiss. Nachr. (1914) 23-36
- [8] D. HILBERT: *Die Grundlagen der Physik*; Nachr. Ges. Wiss. Gött. (1915) 395-407; (1916) 53-76
- [9] A. EINSTEIN: *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*; Ann. d. Phys. **49** (1916) 769-822
- [10] A. EINSTEIN: *The Collected Papers of Albert Einstein*, v. **6** ed. by KOX A.J., KLEIN M.J., SCHULMANN R., Princeton 1996; v. **8** ed. by SCHULMANN R., et al., Princeton 1998
- [11] J. RENN (Ed.) et al., *The Genesis of General Relativity*, 4 Bde., Dordrecht 2006
- [12] H. MINKOWSKI: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*; Nachr. Ges. Wiss. Gött. (1908) 53
- [13] H. WEYL: *Raum - Zeit - Materie*, 1. Aufl., Berlin 1918; 3. Aufl., 1920; 5. Aufl., 1922; 8. Aufl., 1993
- [14] H. A. LORENTZ: *The Theory of Electrons*; repr. 2. Ed., Leipzig 1916
- [15] N. BOHR, Phil. Mag. **26** (1913) 1
- [16] W. PAULI: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. V Teil 2, 539, Leipzig 1921; *Theory of Relativity*, 1958
- [17] A. SOMMERFELD: *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Bd. III, Elektrodynamik; 4. Aufl., Leipzig 1964
- [18] M. BORN: *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips*; Ann. d. Phys. **30** (1909) 1; *Über die Definition des starren Körpers in der Kinematik des Relativitätsprinzips*; Phys. Zeitschr. **11** (1910) 233
- [19] P. EHRENFEST: *Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie*; Phys. Zeitschr. **10** (1909) 918
- [20] P. OSTERMANN: *Ein stationäres Universum und die Grundlagen der Relativitätstheorie*; e-print <<http://arXiv.org/abs/physics/0211054>> (2002/03) 1-44
- [21] A. EINSTEIN: *Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie*; Ann. d. Phys. **23** (1907) 371-384
- [22] M. V. LAUE: *Die Relativitätstheorie* Bd. I/II; 7. durchges. Aufl., Braunschweig 1961
- [23] C. MØLLER: *Relativitätstheorie*; Zürich 1976
- [24] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ: *Lehrbuch d. theor. Physik*, Bd. II, Klassische Feldtheorie; 12. Aufl., Berlin 1992
- [25] M. BORN: *Quantenmechanik der Stoßvorgänge*; ZS f. Phys. **37** (1926) 863; **38** (1926) 803
- [26] A. EINSTEIN: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*; Ann. d. Phys. **17** (1905) 891-921; **18** (1905) 639-641
- [27] H. POINCARÉ: *Sur la dynamique de l'électron*, C. R. Académie d. Sciences **140** (1905), 1504-1508; Rend. Circ. Matem. Palermo **XXI** (1906) 129-175
- [28] Y. AHARANOV, D. BOHM: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*; Phys. Rev. **115** (1959) 485-491
- [29] J. MEHRA, H. RECHENBERG: *The Historical Development of Quantum Theory*; v. 5: *Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics*, New York 1987
- [30] O. KLEIN, ZS f. Phys. **37** (1926) 895; W. GORDON, *ibid.* **40** (1926) 117; s. a. weitere Referenzen in [40]
- [31] W. PAULI, V. WEISSKOPF, Helvet. Phys. Acta **7** (1935) 709
- [32] W. HEISENBERG: *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer Größen*; ZS f. Phys. **33** (1925) 879
- [33] E. SCHRÖDINGER: *Quantisierung als Eigenwertproblem*; Ann. d. Phys. **79** (1926) 361-376; **79** (1926) 489-527; **80** (1926) 437-490; **81** (1926) 109-139
- [34] E. SCHRÖDINGER: *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen*; Ann. d. Phys. **79** (1926) 734-756
- [35] E. SCHRÖDINGER: *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik*; Die Naturwiss. 14. Jahrg. Heft 28 (1926) 664-666
- [36] P. OSTERMANN: *A Strange Detail Concerning the Variational Principle of General Relativity Theory*; e-print <<http://arXiv.org/abs/gr-qc/0410068>> (2004/05) 1-2
- [37] L. DEBROGLIE, Thèse (Paris 1924); Annales de Physique **3** (1925) 22
- [38] L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ: *Lehrbuch d. theor. Physik*, Bd. III, Quantenmechanik; 9. Aufl., Berlin 1986
- [39] M. PLANCK: *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum*; Verh. Dtsch. Phys. Ges. Berlin **2** (1900) 237
- [40] A. SOMMERFELD: *Atombau und Spektrallinien* Bd. I/II; 7./3. durchges. Aufl., Braunschweig 1951/53

- 
- [41] F. SCHWABL: *Quantenmechanik*, 4. Aufl., *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*, Berlin – Heidelberg 1993/1997
  - [42] A. EINSTEIN: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*; Ann. d. Phys. **17** (1905) 132-148
  - [43] A. EINSTEIN: „*Geometrie und Erfahrung*“, in Carl Seelig (Hrsg.), *Mein Weltbild* (Neue, v. Verf. durchges. u. wesentl. erw. Aufl. – Erstdruck 1934 in Amsterdam), Frankfurt/M - Berlin, Nachdruck 1962
  - [44] N. ROSEN: *General Relativity and Flat Space I, II*, Phys. Rev. **57** (1940) 147-150, 150-153; *Flat-Space Metric in General Relativity Theory*; Ann. of Phys. **22** (1963) 1-11
  - [45] T. LEVI-CIVITA: *Der absolute Differentialkalkül*; Berlin 1928
  - [46] R. A. HULSE, J. H. TAYLOR: *Discovery of a Pulsar in a Binary System*, Astrophys. J. **195** (1975), L51
  - [47] P. OSTERMANN: *The Concordance Model – a Heuristic Approach from a Stationary Universe*; e-print <<http://arXiv.org/abs/astro-ph/0312655>> (2003/04) 1-6
  - [48] W. H. BONDI, T. GOLD: *The Steady-State Theory of the Expanding Universe*, M. Not. R. Astr. Soc. **108** (1948) 252-270
  - [49] F. HOYLE: *A New Model for the Expanding Universe*, M. Not. R. Astr. Soc. **108** (1948) 372-382; *On the Cosmological Problem*, ebendort **109** (1949) 365-371
  - [50] F. HOYLE, G. BURBIDGE, J. V. NARLIKAR: *A Different Approach to Cosmology*; Cambridge 2000
  - [51] A. G. RIESS *et al.*: *TYPE Ia SUPERNOVA DISCOVERIES AT  $z > 1$  FROM THE HUBBLE SPACE TELESCOPE: EVIDENCE FOR PAST DECELERATION AND CONSTRAINTS ON DARK ENERGY EVOLUTION*, ApJ **607** (2004) 665–687, e-print astro-ph/0402512 (2004) 1-72 / zitiert als [50a];  
A. G. RIESS *et al.*: *New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at  $z \geq 1$ : Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy*, ApJ **656** (2007), astro-ph/0611572 v2 (2006) 1-82 / zitiert als [50b]
  - [52] C. DE LOYS (von CHÉSAUX et Lavoui): *Traité de la Comète*, Lausanne 1744
  - [53] H. W. M. OLBERS: *Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraums*, (BODES) Astron. Jahrb. f. 1826, **51** (1823), 110-121
  - [54] A. EINSTEIN: *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitz.ber. Preuß. Akad. Wiss. (1917), 142-152
  - [55] W. DE SITTER: *On the relativity of inertia. Remarks concerning EINSTEIN'S latest hypothesis*, Proc. Kkl. Akad. Amsterdam **XIX** (1917), 1217-1225; *On the curvature of space*, ebendort **XX** (1917), 229-243, 1309-1312; *On Einstein's Theory of Gravitation, and its Astronomical Consequences*, M. Not. Roy. Astron. Soc. **LXXVIII** (1917), 3-28
  - [56] A. FRIEDMAN(N): *Über die Krümmung des Raumes*, ZS f. Physik **10** (1922), 377-386; *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*, ebendort **21** (1924), 326-332
  - [57] G. LEMAÎTRE: *UN UNIVERS HOMOGENE DE MASSE CONSTANTE ET DE RAYON CROISSANT, RENDANT COMPTE DE LA VITESSE RADIALE DES NÉBULEUSES EXTRA-GALACTIQUES*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **XLVII** (1927), 49-59; Übers.: *A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-Galactic Nebulae*, M. Not. Roy. Astron. Soc. **XCI** (1931), 483-489; *The Expanding Universe*, ibid. 490-501, 703
  - [58] H. P. ROBERTSON: *KINEMATICS AND WORLD-STRUCTURE*, ApJ. **82** (1935), 284-301; ebendort **83** (1936), 187-201, 257
  - [59] A. G. WALKER: *ON MILNE'S THEORY OF WORLD-STRUCTURE*, Proc. London Math. Soc. **42** (1936), 90-127
  - [60] E. W. KOLB: *A COASTING COSMOLOGY*, ApJ **344** (1989) 543-550
  - [61] S. WEINBERG: *Gravitation and Cosmology*, New York 1972
  - [62] I. NEWTON: *PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA*, Editio Ultima, 1714; 1. Ausg. London 1687
  - [63] K. HENTSCHEL: *Interpretationen und Fehlinterpretationen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie durch Zeitgenossen Albert Einsteins*; Basel – Boston – Berlin 1990
  - [64] G. E. UHLENBECK, S. GOUDSMIT, Nature **117** (1926) 264
  - [65] P. A. M. DIRAC: *The Principles of Quantum Mechanics*; 4th ed. (rev.) Oxford 1967
  - [66] A. G. RIESS *et al.*: Astron.J. **116** (1998) 1009-1038, astro-ph/9805201
  - [67] S. PERLMUTTER *et al.*: Bull.Am.Astron.Soc. **29** (1997) 1351, astro-ph/9812473; ApJ. **517** (1999) 565-586, astro-ph/9812133
  - [68] J. L. TONRY *et al.*: ApJ. **594** (2003) 1-24, astro-ph/0305008
  - [69] R. A. KNOP *et al.*: e-print astro-ph/0309368 (2003) 1-52
  - [70] B. J. BARRIS *et al.*: e-print astro-ph/0310843 (2003) 1-67
  - [71] W. L. FREEDMAN, M. S. TURNER: *Measuring and Understanding the Universe*, e-print astro-ph/0308418 (2003) 1-39
  - [72] G. BÖRNER: *The Early Universe – Facts and Fiction*, 4. Ed., Berlin - Heidelberg - New York 2003
  - [73] C. L. BENNETT *et al.*: *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*; Astrophys.J.Suppl. **148** (2003) 1, astro-ph/0302207
  - [74] W. L. Freedman *et al.*: *Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant*; Astrophys.J. **553** (2001) 47-72, astro-ph/0012376
  - [75] B. R. Parodi *et al.*: *Supernova Type Ia Luminosities, Their Dependence on Second Parameters, and the Value of  $H_0$* ; astro-ph/0004063 (2000) 1-42
  - [76] S. JHA, A. G. RIESS, R. P. KIRSHNER: *Improved Distances to Type Ia Supernovae with Multicolor Light Curve Shapes: MLCS2k2*; astro-ph/0612666 (2006) 1-66